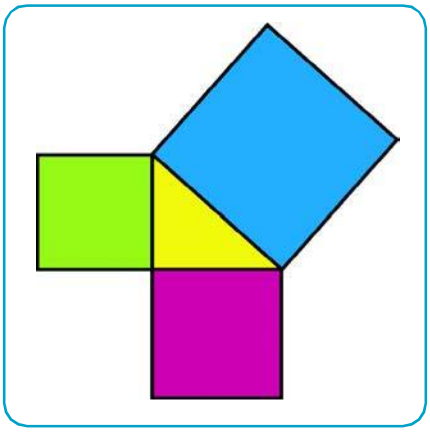
А. А. РАХИМКАРИЕВ, М. А. ТОХТАХОДЖАЕВА

ГЕОМЕТРИЯ 8

Учебник для 8 классов школ общего среднего образования

4-е издание, переработанное и дополненное

Утвержден Министерством народного образования Республики Узбекистан



ТАШКЕНТ
«O‘ZBEKISTON»
2019

Рецензенты:

Учебник написан на основании «Учебного плана общего среднего образования по блоку модуля точных наук (VIII класс)». В учебнике даны требования, которые предъявляются ученикам во время учебного процесса. Цели и задачи обучения предмета математики отмечены со стороны Республиканского центра общего среднего образования. Учебник охватывает элементы опорных компетенций, которые будут формироваться у учеников.

В процессе переработки учебника были учтены рекомендации экспертов и рецензентов.

В конце каждой главы даны примерные задания контрольных работ и тестов, которые помогут ученикам тщательно к ним подготовиться.

В разделе исторические сведения вы познакомитесь с научными трудами и огромным вкладом, который внесли наши ученые-энциклопедисты в науку.

В разделе «Изучаем английский язык» даны важные геометрические понятия на английском языке, которые встречаются в главе.

В течении учебного года можете пользоваться примерами, которые даны для повторения.

Желаем успехов в изучении знаний, которые освещены в темах!

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ:

– правило, свойство, определение;

? – активизирующие вопросы и задания;

– упражнения для работы в классе;

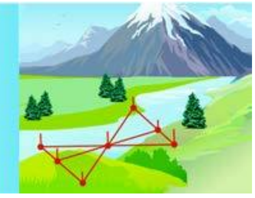
– развивающие упражнения;

– образец решения задачи;

– задания на дом.

Учебник издан за счет средств Республиканского целевого книжного фонда для выдачи в аренду.

ПОВТОРЕНИЕ КУРСА 7-ГО КЛАССА



1. Периметр, медиана, биссектриса и высота треугольника

Вопросы, задачи и задания

1. Что такое: 1) периметр; 2) медиана; 3) биссектриса; 4) высота треугольника?

2. Треугольник, периметр которого равен 18 cm, делится биссектрисой на два треугольника, периметры которых равны 12 cm и 15 cm. Найдите биссектрису этого треугольника (рис. 1).

3. Треугольник делится медианой, проведенной к основанию на два треугольника, периметры которых 18 cm и 24 cm. Найдите большую боковую сторону, если меньшая боковая сторона равна 6 cm (рис. 2).

4. В треугольнике ABC $AB = BC$ и медиана BD равна 6 cm. Найдите периметр данного треугольника, если периметр треугольника ABD равен 24 cm (рис. 3).

Дано: в $\triangle ABC$: $AB = BC$, $BD = 6$ cm − медиана, $P_{ABD} = 24$ cm.

Найти: $P_{ABC} = ?$

Решение. 1) $P_{ABD} = AB + BD + AD$, отсюда:

$$24 = AB + AD + 6, \quad AB + AD = 24 - 6, \quad AB + AD = 18 \text{ (cm)}.$$

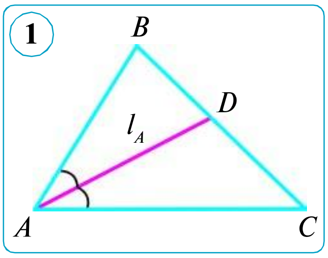
2) $AB = BC$ и $AC = 2AD$, тогда

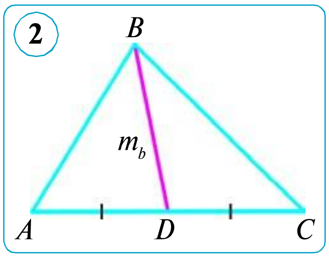
$$P_{ABC} = AB + BC + AC = 2(AB + AD) = 2 \cdot 18 = 36 \text{ (cm)}.$$

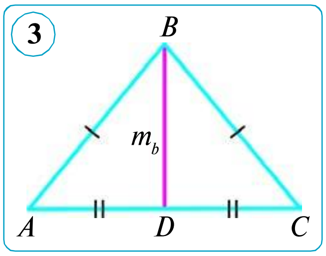
Ответ: $P_{ABC} = 36$ cm.

5. Две стороны треугольника равны 0,5 dm и 8,7 dm. Найдите третью сторону, если ее длина натуральное число.

6. Треугольник, периметр которого равен 30 cm, делится биссектрисой на два треугольника, периметры которых равны 16 cm и 24 cm. Найдите биссектрису этого треугольника.







7. Треугольник, периметр которого равен 36 cm, делится высотой на два треугольника, периметры которых равны 18 cm и 24 cm. Найдите высоту этого треугольника.

8. Периметр равнобедренного треугольника равен 22,5 cm, а боковая сторона равна 0,6 dm. Найдите основание этого треугольника.

2. Признаки равенства треугольников, сумма углов треугольника и свойство внешнего угла треугольника

9. Равны ли треугольники ABC и DEF, если $AB = DE$, $AC = DF$, $\angle A = \angle D$?

10. Один из внешних углов треугольника равен 117°, а не смежные с ним внутренние углы относятся как 5 : 4. Найдите эти внутренние углы.

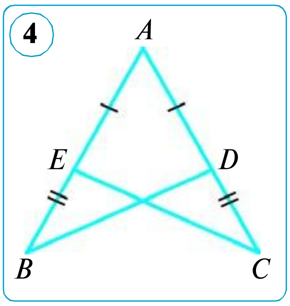
11. В равностороннем треугольнике ABC биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O. Найдите угол AOE между биссектрисами треугольника ABC.

12. Могут ли углы при основании равнобедренного треугольника быть тупыми?

Решение. Как нам известно, в равнобедренном треугольнике углы при основании равны. Так как сумма двух тупых углов больше 180°. А это противоречит теореме о сумме углов треугольника. *Ответ:* не могут.

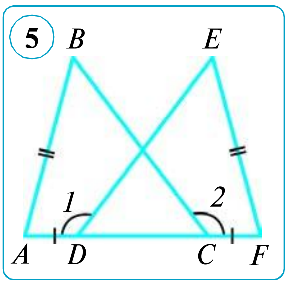
13. Один из внешних углов треугольника равен 108°, а не смежные с ним внутренние углы относятся как 2 : 7. Найдите внутренние углы.

14. Две стороны и угол одного треугольника равны, соответственно, двум сторонам и углу другого треугольника. Могут ли эти треугольники быть равными?



15. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, и медианы CD и C_1D_1, проведенные к сторонам AB и A_1B_1 равны.

16. На рисунке 4: $AB = AC$ и $AE = AD$. Докажите, что $BD = CE$.



17. На рисунке 5: $AD = CF$, $AB = FE$ и $CB = DE$. Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$.

18. В треугольнике ABC угол B равен 42°, а внешний угол при вершине A равен 100°. Найдите угол ACB.

19. В прямоугольном треугольнике ABC угол C – прямой, а внешний при вершине A равен 136°. Найдите угол B.

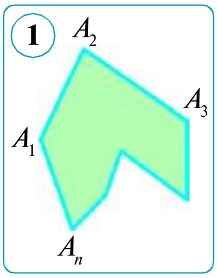
ГЛАВА I
ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ И ИХ СВОЙСТВА

1. СВОЙСТВА ВНУТРЕННИХ И ВНЕШНИХ УГЛОВ МНОГОУГОЛЬНИКА

1. Многоугольники. Рассмотрим фигуру, которая состоит из отрезков A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1. Отрезки расположены так, что никакие два *соседних отрезка* (то есть таких, которые имеют общий конец), не лежат на одной прямой, а несоседние отрезки не имеют общих точек (рис. 1). Такую фигуру называют ***многоугольником***. Точки A_1, A_2, ..., A_n называют ***вершинами многоугольника***, а отрезки A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 – ***сторонами многоугольника***.

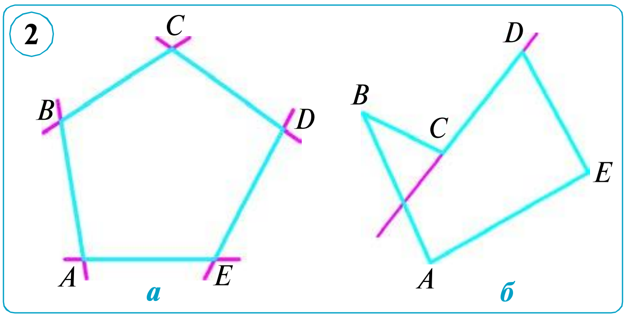
Число сторон многоугольника равно числу его вершин, т.е. числу его углов. Многоугольник называют по числу его углов: *треугольник*, *четырехугольник* и т.д.

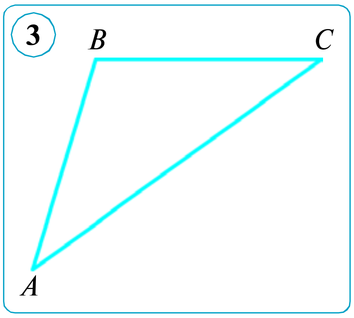


Если замкнутая ломаная не пересекается сама собой, то такая ломаная называется ***простой замкнутой ломаной***. Всякая простая замкнутая ломаная делит плоскость на две части – *внутреннюю* и *внешнюю*, являясь их общей границей. На рис. 1 внутренняя часть закрашена.

Определение 1. *Многоугольник называется **выпуклым**, если он лежит по одну сторону от любой прямой*, которая содержит его сторону.

Сама эта прямая принадлежит полуплоскости, содержащей многоугольник.





На рис. 2, *а* и 3 изображены выпуклые многоугольники, а рис. 2, *б* невыпуклый. Треугольник является выпуклым многоугольником (рис. 3).

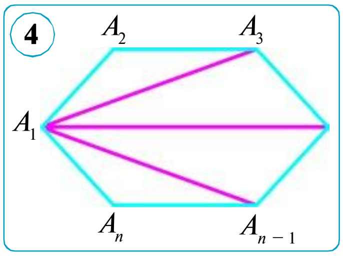
2. Свойства внутренних и внешних углов многоугольника.

Определение 2. ***Внутренним углом многоугольника при данной вершине*** *называется угол, образованный соседними сторонами, исходящими из этой вершины.*

Теорема 1.

Сумма внутренних углов выпуклого *n*-угольника равна $180^\circ(n-2)$, где *n* − число сторон многоугольника.

Доказательство. Пусть $A_1A_2A_3...A_n$ − данный выпуклый *n*-угольник и $n > 3$ (рис. 4). Из некоторой вершины, например из A_1, проведем все его диагонали, которые разобьют его на $(n-2)$ треугольника.



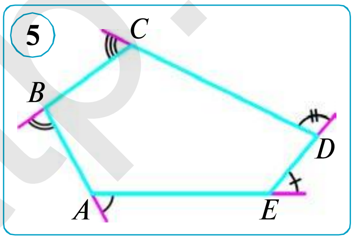
Действительно, при этом каждый треугольник образован одной стороной многоугольника и двумя диагоналями, за исключением *двух крайних треугольников* ($\triangle A_1A_2A_3$ и $\triangle A_1A_{n-1}A_n$), которые образованы двумя сторонами многоугольника и одной диагональю.

Поэтому число треугольников будет $(n-2)$, т.е. на два меньше числа сторон многоугольника. Сумма углов многоугольника равна сумме углов всех составляющих его треугольников: $S_n = 180^\circ(n-2)$, что и тр. д.

Определение 3. Угол, смежный с внутренним углом многоугольника при данной вершине, называют ***внешним углом многоугольника*** *при данной вершине.*

Теорема 2.

Сумма внешних углов выпуклого *n*-угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.



Доказательство. Построим при каждой вершине *n*-угольника по одному внешнему углу (рис. 5). Сумма каждого угла многоугольника и смежного с ним равна 180°. Поэтому сумма всех внутренних и внешних углов, взятых по одному при каждой вершине, равна $180^\circ n$. Чтобы получить сумму внешних углов вычтем из этой суммы сумму внутренних углов:

$$180^\circ n - 180^\circ(n-2) = 180^\circ n - 180^\circ n + 360^\circ = 360^\circ,$$ что и тр. д.

Задача 1. Чему равны внутренние углы (α_n) равностороннего (правильного) n- угольника?

Решение. По доказанной теореме 1, сумма углов произвольного выпуклого n- угольника равна $180°(n-2)$. Так как в правильном n-угольнике все углы равны, то каждый из них равен: $\alpha_n = \frac{180°(n-2)}{n}$.

Задача 2. Чему равен каждый внешний угол (β_n) равностороннего (правильного) n- угольника?

Решение. По доказанной теореме 2, сумма внешних углов выпуклого n- угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.

Таким образом, каждый внешний угол правильного n- угольника равен: $\beta_n = \frac{360°}{n}$.

Вопросы, задачи и задания

1. 1) Что такое: а) внутренний угол выпуклого многоугольника при данной вершине; б) внешний угол выпуклого многоугольника?
2) Чему равна сумма внутренних углов выпуклого n-угольника?

2. Найдите количество сторон выпуклого многоугольника, сумма углов которого равна: 1) 1080°; 2) 1620°; 3) 3960°.

3. Найдите сумму внутренних углов выпуклого: 1) четырехугольника; 2) двенадцатиугольника; 3) тридцатиугольника; 4) пятидесятиугольника.
Образец. 1) $S_{13} = 180° \cdot (13 - 2) = 180° \cdot 11 = 1980°$.

4. Найдите наименьший угол четырехугольника, если сумма его углов, взятых по три, соответственно равна 240°, 260° и 280°.

5. Найдите количество сторон выпуклого многоугольника, каждый угол которого равен: 1) 150°; 2) 170°; 3) 171°.

6. Чему равно число сторон выпуклого многоугольника, если сумма всех его внутренних углов в три раза больше суммы его внешних углов, взятых по одному при каждой из его вершин?
Решение. По условию задачи: $180°(n-2) = \ldots \cdot 360°$. Отсюда

$$180°(n-2) = \ldots \cdot 2 \cdot 180°,\ n-2 = 6,\ n = \ldots .$$

Ответ: $n = \ldots$

7. Сколько сторон у выпуклого многоугольника, если каждый его внешний угол равен: 1) 18°; 2) 24°; 3) 60°?

8. Если три угла четырехугольника являются тупыми, то четвертый угол — острый. Докажите.

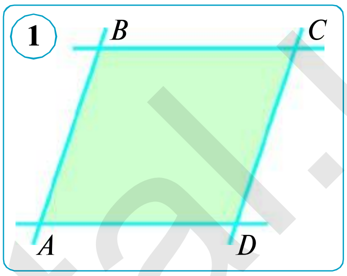
9. Найдите количество сторон выпуклого многоугольника, если каждый его внешний угол равен: 1) 15°; 2) 45°; 3) 72°?

10. Найдите углы выпуклого четырехугольника, если они пропорциональны числам 1, 2, 3 и 4.

2. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ И ЕГО СВОЙСТВА

1. Параллелограмм. Рассмотрим на плоскости две параллельные прямые, пересекающиеся двумя другими параллельными прямыми (рис. 1). В результате такого пересечения образуется четырехугольник, который имеет *специальное* название – *параллелограмм*.

Определение. ***Параллелограммом*** *называется четырехугольник*, противолежащие стороны которого попарно параллельны.



Если $ABCD$ параллелограмм, то $AB \parallel DC$ и $AD \parallel BC$ (рис. 1).

Задача 1. На рис. 2 $\triangle ABC = \triangle CDA$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм.

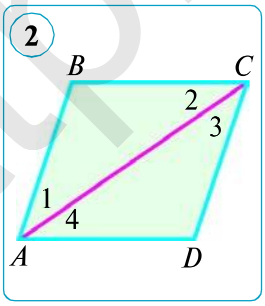
Решение. Из равенства треугольников ABC и CDA следует равенство углов: $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 4$. Углы 1 и 3 являются внутренними накрест лежащими при параллельных прямых AB и CD и секущей AC. Аналогично, углы 2 и 4 являются внутренними накрест лежащими при параллельных прямых BC и AD и секущей AC. По признаку параллельности прямых имеем: $AB \parallel DC$ и $BC \parallel AD$. Следовательно, в четырехугольнике $ABCD$ противолежащие стороны попарно параллельны, т.е. $ABCD$ – параллелограмм по определению.

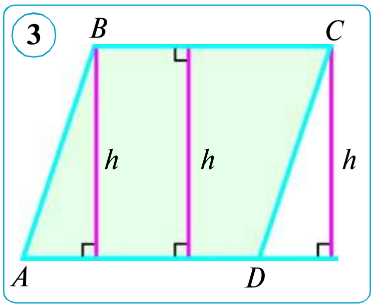
Высотой параллелограмма называется перпендикуляр, проведенный из точки одной стороны к прямой, которая содержит противолежащую сторону. Очевидно, что к одной стороне параллелограмма можно провести бесконечно много высот (рис. 3) – все они будут равны как расстояние между параллельными прямыми, а из одной вершины параллелограмма можно провести две высоты к разным сторонам и в общем случае они имеют разную длину. Например, на рис. 4 BP и BF – высоты.

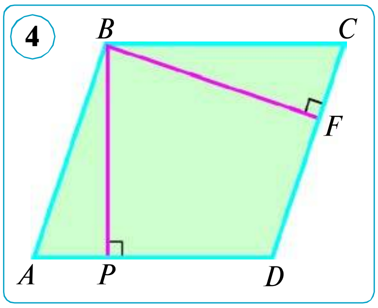
2. Свойства параллелограмма.

Теорема 1.

(Свойство 1.) Сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, равна 180°.







Доказательство. Углы, прилежащие к стороне параллелограмма, являются внутренними односторонними углами. Поэтому их сумма равна 180°. Теорема доказана.

Теорема 2.

(Свойство 2.) В параллелограмме противоположные стороны и противоположные углы равны между собой.

Доказательство. Пусть $ABCD$ – параллелограмм, т.е. $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$. Проведем в параллелограмме $ABCD$ диагональ AC (см. рис. 2) и рассмотрим треугольники ABC и CDA. У них сторона AC – общая, $\angle 1 = \angle 3$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей AC, $\angle 2 = \angle 4$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AC. Следовательно, $\triangle ABC = \triangle CDA$ по второму признаку равенства треугольников. Отсюда, в частности, следует, что $AB = CD$, $AD = BC$ и $\angle B = \angle D$. А поскольку $\angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 3$, то $\angle BAD = \angle BCD$, т.е. $\angle A = \angle C$).

Задача 2. Сумма двух углов параллелограмма равна 172°. Найдите углы параллелограмма.

Решение. Пусть дан параллелограмм $ABCD$. Поскольку сумма двух соседних углов параллелограмма равна 180°, то данные углы могут быть только противолежащими. Пусть $\angle A + \angle C = 172°$. Тогда по второму свойству параллелограмма, $\angle A = \angle C = 172° : 2 = 86°$.

Сумма всех углов параллелограмма равна 360°, поэтому остальные два угла параллелограмма равны:

$$\angle B = \angle D = (360° - 172°) : 2 = 94°.$$

Ответ: 86°, 94°, 86°, 94°.

Теорема 3.

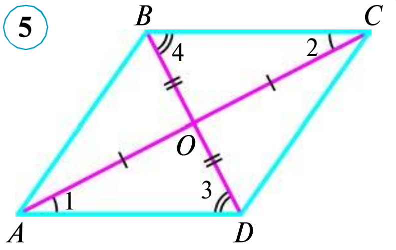
(Свойство 3.) Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Доказательство. Пусть O – точка пересечения диагоналей AC и BD параллелограмма $ABCD$ (рис. 5).

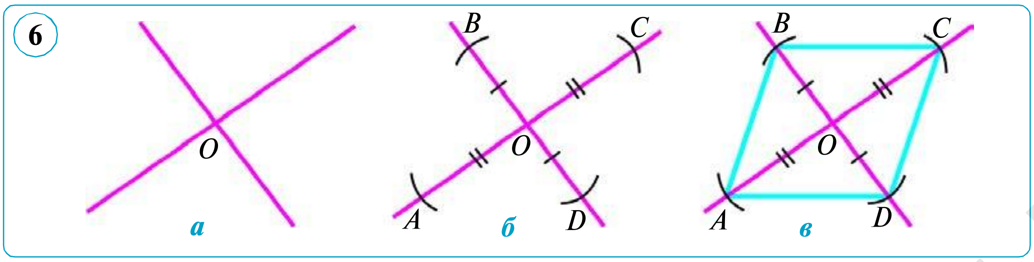
Докажем, что $AO = OC$ и $DO = OB$.

Треугольники AOD и COB равны по второму признаку равенства треугольников ($AD = BC$ по второму свойству параллелограмма, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AD и BC секущими AC и BD соответственно). Отсюда следует, что $AO = CO$ и $DO = OB$, т.е. точка O является серединой каждой из диагоналей AC и BD.

5



Теорема доказана.



Задача 3. Используя свойство 3 постройте параллелограмм.

Шаг 1. Проведем две пересекающиеся прямые и обозначим точку их пересечения буквой O (рис. 6, *а*).

Шаг 2. На одной из прямых отложим циркулем равные отрезки OA и OC, а на другой – равные отрезки OB и OD (рис. 6, *б*).

Шаг 3. Соединим последовательно точки A, B, C и D (рис. 6, *в*). Четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм.

Вопросы, задачи и задания

1. 1) Что такое параллелограмм? Чему равна сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне?
2) Что можно сказать о диагоналях параллелограмма?

2. Периметр параллелограмма равен 152 cm. Найдите стороны параллелограмма, если одна из них:
1) на 25 cm больше другой; 2) в три раза меньше другой.

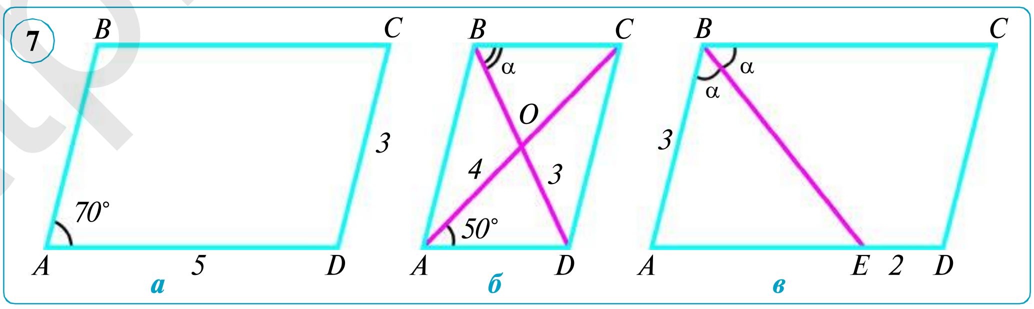
3. Найдите углы параллелограмма, если сумма двух углов равна:
1) 70°; 2) 110°; 3) 170°.

4. В параллелограмме $ABCD$: $AB = 7$ cm, $BC = 11$ cm, $AC = 14$ cm, $BD = 12$ cm; O – точка пересечения диагоналей. Найдите периметры треугольников ABO и BOC.

5. В параллелограмме сумма смежных сторон равна 20 cm, а разность равна 12 cm. Найдите стороны этого параллелограмма.

6. Периметр параллелограмма равен 6,4 cm. Найдите его стороны, если две его стороны относятся как 5 : 3.

7. На рис. 7 обозначены величины некоторых элементов. Какие еще величины можно найти?



3. ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

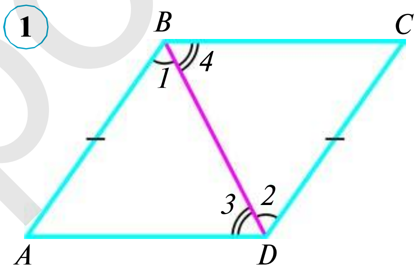
Для того чтобы использовать свойства параллелограмма, во многих случаях необходимо сначала убедиться, что данный четырехугольник действительно является параллелограммом. Это можно определить либо по определению (см. задачу 1, стр. 8), либо по признакам – условиям, гарантирующим, что данный четырехугольник – параллелограмм. Докажем признаки параллелограмма, которые чаще всего применяются на практике.

Теорема 1.

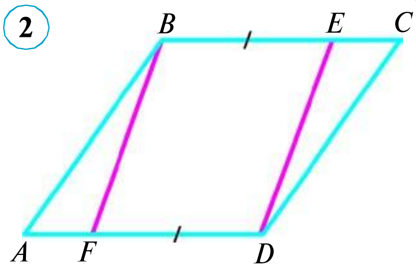
(1-й признак.) Если две противолежащие стороны четырехугольника параллельны и равны, то этот четырехугольник – параллелограмм.

Доказательство. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ (рис. 1) $AB \parallel CD$ и $AB = CD$. Проведем диагональ BD и рассмотрим треугольники ABD и CDB. Они имеют общую сторону BD, $AB = CD$ по условию, $\angle 1 = \angle 2$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей BD. Следовательно, $\triangle ABD = \triangle CDB$ по первому признаку равенства треугольников. Из равенства этих треугольников следует равенство углов 3 и 4. Но эти углы являются внутренними накрест лежащими при прямых AD и BC и секущей BD. Тогда по признаку параллельных прямых $AD \parallel BC$. Таким образом, в четырехугольнике $ABCD$ противолежашие стороны попарно параллельны, откуда следует, что четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм по определению.

1



2



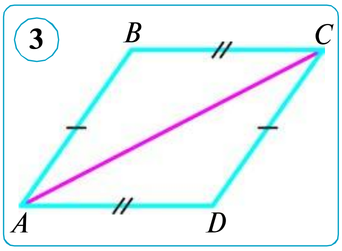
Теорема доказана.

Задача 1. На сторонах параллелограмма $ABCD$ отложим равные отрезки $BE = DF$ (рис. 2). Является ли четырехугольник $BEDF$ параллелограммом?

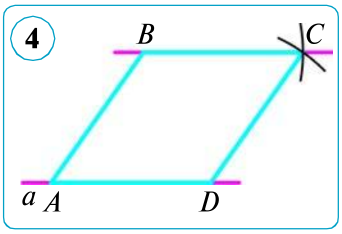
Решение. Да, так как противоположные стороны четырехугольника $BEDF$ равны и параллельны. Поэтому по первому признаку параллелограмма, четырехугольник $BEDF$ – параллелограмм. *Ответ:* да, является.

Теорема 2.

(2-й признак.) Если противолежащие стороны четырехугольника попарно равны, то этот четырехугольник – параллелограмм.



Доказательство. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD$ и $BC = DA$ (рис. 3). Проведем диагональ AC и рассмотрим треугольники ABC и CDA. Тогда они равны по третьему признаку равенства треугольников (сторона AC – общая, а $AB = CD$ и $BC = DA$ – по условию). Из равенства треугольников следует равенство углов CAB и ACD, которые являются внутренними накрест лежащими при прямых AD и BC и секущей AC. По признаку параллельности прямых $AD \parallel BC$. Следовательно, в четырехугольнике $ABCD$ стороны AD и BC параллельны и равны, и по только что доказанному признаку 1 четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм.



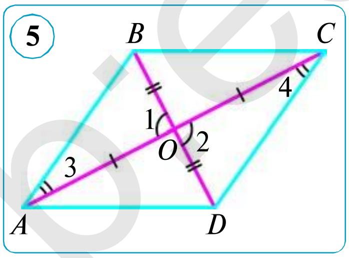
Теорема доказана.

Задача 2. Постройте прямую, проходящую через данную точку и параллельную данной прямой.

Решение. Пусть a – прямая, B – не принадлежащая ей точка. Отметим какие-нибудь точки A и D на прямой a (рис. 4). С центрами B и D проведем окружности с радиусами AD и AB соответственно. Их точку пересечения обозначим C. Проведем прямую BC. Она и будет искомой. Действительно, в четырехугольнике $ABCD$ равны противоположные стороны. Следовательно, он является параллелограммом, и, значит, $BC \parallel AD$.

Теорема 3.

(3-й признак.) Если диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм.



Доказательство. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O и выполняются равенства $AO = OC$ и $BO = OD$ (рис. 5). Рассмотрим треугольники AOB и COD. Эти треугольники равны по первому признаку равенства треугольников: $\angle 1 = \angle 2$ (как вертикальные), $AO = OC$ и $BO = OD$ (по условию). Следовательно, равны и соответствующие стороны и углы этих треугольников: $AB = CD$, $\angle 3 = \angle 4$. Из равенства углов 3 и 4 вытекает, что $AB \parallel CD$ (по признаку параллельных прямых). Таким образом, стороны AB и CD четырехугольника $ABCD$ равны и параллельны, значит, по первому признаку параллелограмма четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм. Теорема доказана.

Вопросы, задачи и задания

1. 1) Если две противолежащие стороны четырехугольника параллельны и равны, то этот четырехугольник – параллелограмм. Сможете ли это доказать?

2) Докажите, 2-й и 3-й признаки параллелограмма.

2. Даны два равных и параллельных отрезка. Их концы соединены не пересекающимися отрезками. Верно ли, что получившийся четырехугольник является параллелограммом?

3. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD параллельны. Найдите периметр четырехугольника, если $AB = CD = 11$ cm, $AD = 5$ cm.

4. Является ли четырехугольник $ABCD$ на рис. 6 параллелограммом, если: 1) $\angle 1 = 70°$, $\angle 3 = 110°$, $\angle 2 \neq \angle 4$; 2) $\angle 1 = \angle 2 = 60°$, $\angle 3 = \angle 115°$?

Решение. 1) В четырехугольнике $ABCD$ две стороны AB и CD параллельны, так как $\angle 1 + \angle 3 = 70° + 110° = 180°$, а эти углы – односторонние при пересечении прямых AB и DC секущей AD. Поскольку $AB \parallel DC$, то $\angle 1 = \angle 4$ (как соответственные углы). Две другие стороны AD и BC четырехугольника $ABCD$ не параллельны, так как накрест лежащие углы 1 и 2 не равны ($\angle 1 = \angle 4 \neq \angle 2$). Следовательно, четырехугольник $ABCD$ не является параллелограммом.

Ответ: четырехугольник $ABCD$ не является параллелограммом.

2) Аналогично решается как в предыдущем.

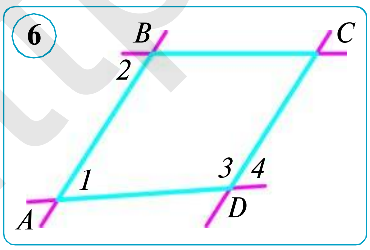
5. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O (см. рис. 5, стр. 9). 1) Какой отрезок является медианой треугольника ACD? 2) В каком треугольнике медианой является отрезок AO?

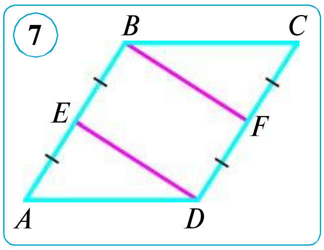
6. В параллелограмме $ABCD$ точки E и F – середины сторон AB и CD соответственно (рис. 7). Докажите, что четырехугольник $EBFD$ – параллелограмм.

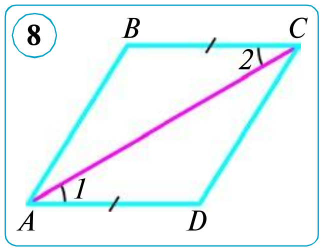
7. В четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD параллельны. Найдите периметр четырехугольника, если $AB = CD = 9$ cm, $AD = 4$ cm.

8. В четырехугольнике $ABCD$: $AB = CD$, $AD = BC$. Найдите углы четырехугольника, если $\angle A = 3\angle B$.

9. В параллелограмме биссектриса угла делит противоположную сторону на отрезки, равные 4 cm и 5 cm. Найдите периметр параллелограмма.

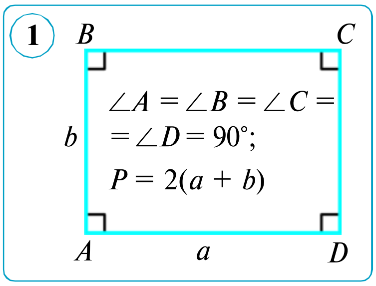






4. ПРЯМОУГОЛЬНИК И ЕГО СВОЙСТВА

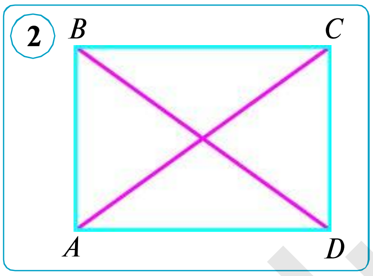
Определение. ***Прямоугольником*** *называется параллелограмм, у которого все углы прямые.*



На рис. 1 изображен прямоугольник $ABCD$. Так как прямоугольник является частным случаем параллелограмма, то он обладает всеми свойствами параллелограмма: противолежащие стороны прямоугольника параллельны и равны, противолежащие углы равны, диагонали точкой пересечения делятся пополам и т.д. Однако, прямоугольник имеет некоторые особые свойства. Докажем одно их них.

Теорема.

(Свойство прямоугольника.) Диагонали прямоугольника равны.



Доказательство. Пусть дан прямоугольник $ABCD$ с диагоналями AC и BD. Докажем, что $AC = BD$ (рис. 2). Треугольники ACD и DBA прямоугольные и равны по двум катетам (AD – общая, $CD = BA$ как противолежащие стороны прямоугольника). Отсюда следует равенство гипотенуз этих треугольников, т. е. $AC = BD$. Имеет место и обратное утверждение (признак прямоугольника).

Обратная теорема.

Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм прямоугольник.

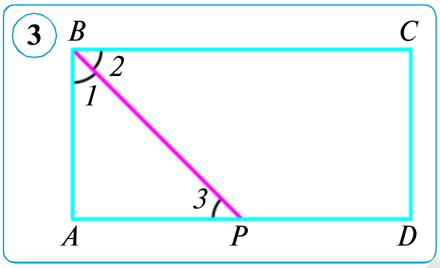
Доказательство. Пусть в параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD равны (рис. 2). Треугольники ABD и DCA равны по трем сторонам ($AB = DC$, $BD = CA$, AD – общая сторона). Отсюда следует, что $\angle A = \angle D$. Так как в параллелограмме противоположные углы равны, то $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$. Таким образом, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$. Параллелограмм – выпуклый четырехугольник, поэтому $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$. Следовательно, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$, т.е. параллелограмм $ABCD$ является прямоугольником. Теорема доказана.

Задача 1. Периметр прямоугольника $ABCD$ равен 24 cm, а его диагональ BD равна 9 cm. Найдите периметр треугольника ABD.

Решение. $AB + AD = P_{ABCD} : 2 = 24 : 2 = 12$ (cm) – сумма смежных сторон (см. рис. 2). $P_{ABD} = AB + AD + BD = 12 + 9 = 21$ (cm).

Ответ: $P_{ABD} = 21$ cm.

Задача 2. Найдите периметр прямоугольника $ABCD$, если биссектриса угла B пересекает сторону AD в точке P и делит ее на отрезки $AP = 17$ cm и $PD = 21$ cm (рис. 3).



Решение. 1) Так как $ABCD$ — прямоугольник, то $AD \parallel BC$ и поэтому $\angle 2 = \angle 3$ (как накрест лежащие углы). Но $\angle 2 = \angle 1$ по условию, следовательно, $\angle 1 = \angle 3$ и $\triangle ABP$ — равнобедренный треугольник с основанием BP. Значит, $AB = AP = 17$ cm.

2) $AD = AP + PD = 17 + 21 = 38$ (cm);

$P_{ABCD} = 2\,(AB + AD) = 2 \cdot (17 + 38) = 2 \cdot 55 = 110$ (cm).

Ответ: $P_{ABCD} = 110$ cm.

Задача 3. Докажите, что если у параллелограмма все углы равны, то он является прямоугольником.

Решение. Углы параллелограмма, прилежащие к одной стороне, являются внутренними односторонними, поэтому их сумма равна 180°. Так как по условию задачи эти углы равны, то каждый из них прямой. А параллелограмм, у которого все углы прямые, есть прямоугольник.

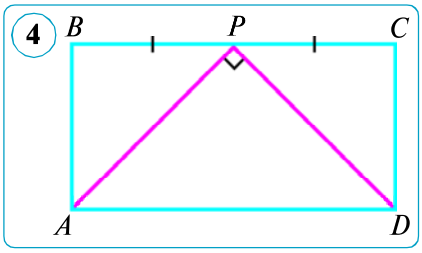
Вопросы, задачи и задания

1. 1) Какой параллелограмм называется прямоугольником?
2) Сформулируйте особое свойство прямоугольника.

2. В прямоугольнике $ABCD$: $AB = 9$ cm, $BC = 7$ cm. Найдите:
1) расстояние от точки C до стороны AD;
2) расстояние между прямыми AB и CD.

3. Периметр прямоугольника равен 24 cm. Найдите сумму расстояний от произвольной внутренней точки прямоугольника до его сторон.

4. Периметр прямоугольника $ABCD$ равен 24 cm. Точка P — середина стороны BC, а $\angle APD = 90^\circ$ (рис. 4). Найдите стороны прямоугольника.



5. Докажите, что если у четырехугольника диагонали равны и делятся точкой пересечения пополам, то этот четырехугольник — прямоугольник.

6. Стороны параллелограмма равны 4 cm и 7 cm. Могут ли его диагонали равняться: 1) 12 cm и 5 cm; 2) 10 cm и 3 cm?

7. Найдите стороны прямоугольника, периметр которого равен 42 cm, а одна сторона в два раза больше другой.

5–6. СВОЙСТВА РОМБА И КВАДРАТА

1. Ромб и его свойства.

Определение. ***Ромбом*** *называется параллелограмм, у которого все стороны равны* (рис. 1).

Так как ромб является параллелограммом, то он обладает всеми свойствами параллелограмма. Рассмотрим особое свойство ромба.

Теорема.

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам, т.е. являются биссектрисами его углов.

Доказательство. Пусть диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 2). Поскольку стороны ромба равны, то треугольник ABC равнобедренный с основанием AC, а по свойству диагоналей параллелограмма точка O – середина AC. Следовательно, отрезок BO – медиана равнобедренного треугольника, которая одновременно является его высотой и биссектрисой. Это означает, что $BD \perp AC$, т.е. диагонали ромба перпендикулярны, и $\angle ABD = \angle CBD$, т.е. BD – биссектриса угла ABC.

Аналогично доказываем, что диагонали ромба являются биссектрисами и других его углов. Теорема доказана.

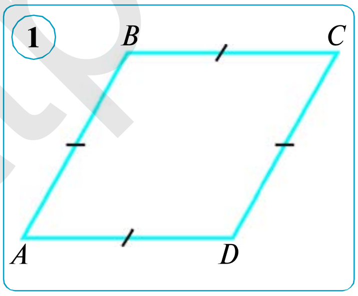
Задача 1. Диагональ BD ромба $ABCD$ образует с его стороной угол, равный 35°. Найдите углы ромба (рис. 3).

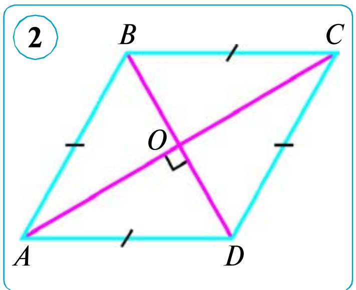
Решение. Пусть $\angle ABD = 35°$, тогда $\angle CBD = 35°$ (по свойству ромба). Следовательно, $\angle ABC = 2\angle ABD = 2 \cdot 35° = 70°$, $\angle ADC = \angle ABC = 70°$ (2- е свойство параллелограмма), $\angle DAB = 180° - \angle ABC$ (1- е свойство параллелограмма). Значит, $\angle DAB = 180° - 70° = 110°$, $\angle BCD = \angle DAB = 110°$ (2- е свойство параллелограмма).

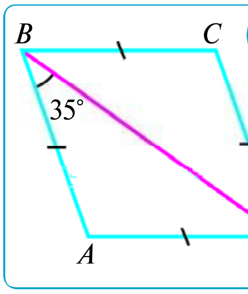
Ответ: 70°, 110°, 70°, 110°.

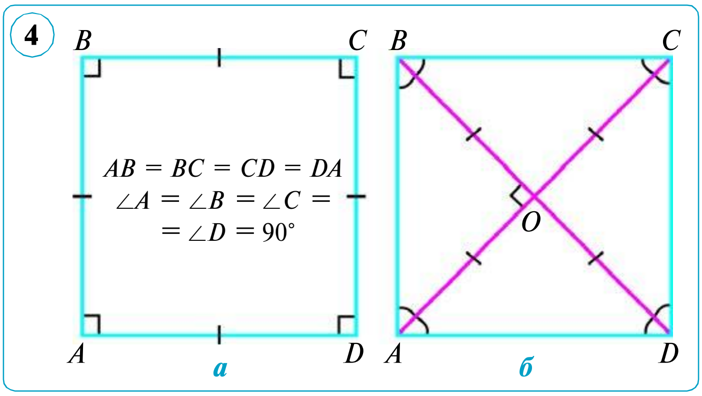
Задача 2. Могут ли различные ромбы иметь равные периметры?

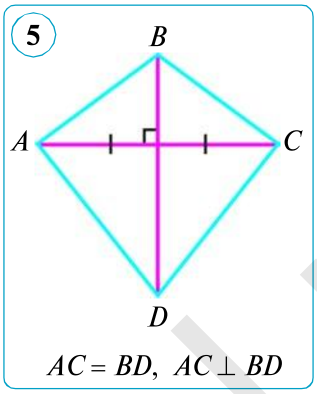
Решение. Ромбы. которые имеют равные периметры, различаются между собой только углами. Например, если острый угол ромба: 1) равен 40°, то остальные углы равны 140°, 40°, 140° соответственно; 2) равен 15°, то остальные углы равны 165°, 15°, 165° соответственно и

1


2


3






т.д. Подобно этому, можно вместо острого угла брать различные тупые углы. *Ответ:* да, могут.

2. Квадрат и его свойства.

Определение. ***Квадратом*** *называется прямоугольник, у которого все стороны равны.*

Можно сказать, что квадрат является ромбом, у которого все углы прямые (рис. 4, *а*). Квадрат одновременно является параллелограммом, прямоугольником и ромбом и, значит, обладает всеми свойствами этих фигур. Приведем основные свойства квадрата.

1°. Все углы квадрата прямые.

2°. Диагонали квадрата равны между собой.

3°. Диагонали квадрата взаимно перпендикулярны, делят углы квадрата пополам и делятся точкой пересечения пополам (рис. 4, *б*).

Докажите эти свойства самостоятельно.

Задача 3. Докажите, что если в ромбе диагонали равны, то этот ромб является квадратом.

Доказательство. Так как ромб является параллелограммом, то из признака прямоугольника следует, что ромб, у которого равны диагонали, является прямоугольником, а значит, он является квадратом.

Задача 4. В выпуклом четырехугольнике диагонали перпендикулярны и равны между собой. Является ли этот четырехугольник квадратом?

Решение. На рис. 5 приведен один из примеров, удовлетворяющих условию задачи. В этом случае одна из диагоналей разделена пополам на части. Но в этом случае выполняются только некоторые свойства квадрата: 2° и 3°, т.е. выполняется условие взаимной перпендикулярности диагоналей и их равенство. Поэтому этот четырехугольник не является квадратом. В определенных случаях, обе диагонали четырехугольника могут делиться пополам. Только в этом случае четырехугольник будет квадратом.

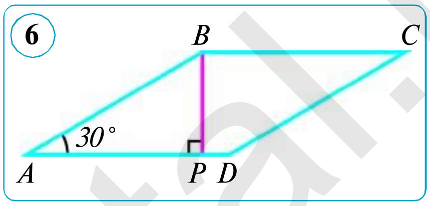
Ответ: не обязательно.

Вопросы, задачи и задания

1. 1) Что такое ромб? Перечислите свойства ромба.
2) Что такое квадрат? Дайте определение квадрата, исходя из понятий: а) параллелограмма; б) ромба; в) прямоугольника.
3) Перечислите свойства квадрата.

2. Сторона квадрата равна 20 cm. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей до одной из сторон квадрата.

3. Сторона ромба $ABCD$ равна 24 cm, а угол A равен 30°. Найдите расстояние от вершины B до противолежащей ей стороны AD (рис. 6).



В пустые места поставьте соответствующие числа.

Решение. Расстояние от точки B до прямой AD равно длине перпендикуляра, проведенного из точки B на эту прямую, т.е. длине отрезка BP. Рассмотрим треугольник ABP: $\angle APB = ...°$, $\angle A = ...°$, $AB = ...$.

Тогда $BP = 0{,}5 \cdot ... = 0{,}5 \cdot ... = ...$ (cm) (по свойству катета, лежащего против угла...°). *Ответ:* $BP = ...$ cm.

4. 1) (*Практические задания.*) Как можно построить: 1) ромб из двух равных треугольников; 2) ромб и квадрат из четырех равных треугольников? Покажите возможные решения.

5. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что две его вершины лежат на гипотенузе, а две другие – на катетах. Найдите сторону квадрата, если гипотенуза равна 21 cm.

6. Углы, образуемые диагоналями ромба с его сторонами, относятся как 2 : 7. Найдите углы ромба.

7. Какая получится фигура, если середины сторон квадрата последовательно соединить отрезками?

8. Докажите, что все высоты ромба равны.

9. Стороны четырехугольника относятся как 2 : 4 : 5 : 7, а периметр равен 108 cm. Найдите стороны этого четырехугольника.

10. Найдите периметр ромба, у которого один из углов равен 60°, а меньшая диагональ равна 16 cm.

11. Углы, образуемые диагоналями ромба с одной из его сторон, относятся как 5 : 4. Найдите углы ромба.

12. Найдите сторону квадрата, периметр которого равен периметру прямоугольника, имеющего длину 32 cm, а ширину 28 cm.

13. Найдите периметр четырехугольника, если его наименьшая сторона равна 5 cm, а каждая следующая сторона на 2 cm больше предыдущей.

7–8. ТРАПЕЦИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

1. Определение трапеции. Как известно, любой параллелограмм имеет две пары параллельных сторон. Рассмотрим теперь четырехугольник, который имеет только одну пару параллельных сторон.

Определение 1. ***Трапецией*** *называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.*

Параллельные стороны трапеции называют ее *основаниями*, а не параллельные стороны – *боковыми сторонами.* На рисунке 1 в трапеции $ABCD$ стороны AD и BC являются *основаниями*, AB и CD *боковыми сторонами*.

Определение 2. ***Прямоугольной трапецией*** *называется трапеция, у которой одна из боковых сторон перпендикулярна основаниям* (рис. 2).

Определение 3. ***Равнобедренной трапецией*** *называется трапеция, у которой боковые стороны равны.*

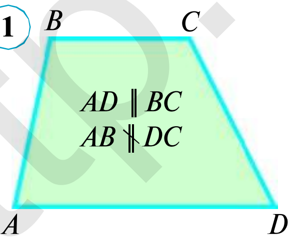
На рисунке 3 изображена равнобедренная трапеция $ABCD$: $AB = CD$.

2. Признак трапеции. Теперь рассмотрим, при каких условиях четырехугольник $ABCD$ будет трапецией.

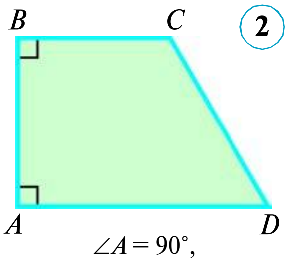
Теорема.

Если в четырехугольнике сумма двух углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°, а сумма двух углов, прилежащих к смежной стороне, отлична от 180°, то этот четырехугольник является трапецией.

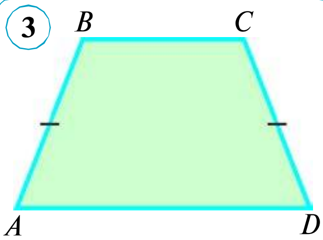
Доказательство. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $\angle A + \angle B = 180^\circ$ и $\angle A + \angle D \neq 180^\circ$. Докажем, что четырехугольник $ABCD$ является трапецией. Во-первых, покажем, что пара его противоположных сторон параллельна. Проведем прямую AB, $BC\,(l_1)$ и AD (l_2) (рис. 4). По условию $\angle A + \angle B = 180^\circ$, тогда отрезки AD и BC параллельны по признаку параллельности (*если при пересечении двух прямых a и b третьей прямой c, сумма двух внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые a и b параллельны.*).

1


AD и BC – основания, AB и DC – боковые стороны

2


$\angle A = 90^\circ$, прямоугольная трапеция

3


$AB = DC$, равнобедренная трапеция

Во-вторых, установим, что две другие стороны четырехугольника $ABCD$ не параллельны. По условию $\angle A + \angle D \neq 180°$, в этом случае отрезки AB и DC будут не параллельны (*по пятой аксиоме Евклида, т.е. не выполняется необходимое условие параллельности прямых*). Следовательно, четырехугольник $ABCD$ будет трапецией. Что и требовалось доказать.

Из этой теоремы вытекает следующее следствие.

Следствие. *Если один из углов трапеции равен 90°, то еще один угол трапеции равен 90°.*

Определение 4. ***Высотой трапеции*** *называется перпендикуляр, проведенный из точки одного основания к прямой, содержащей другое основание.*

Любой отрезок прямой, перпендикулярный основаниям и заключенный между ними, можно взять в качестве высоты трапеции, т.е. в трапеции можно провести бесконечно много высот (рис. 5).

3. Свойство равнобедренной трапеции.

Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$, где $AD = a$ — большее основание, $BC = b$ — меньшее основание. Проведем из вершины B меньшего основания высоту BP (рис. 6). Пусть основание высоты P разбивает сторону AD на отрезки AP и PD.

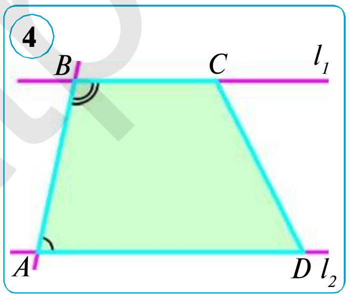
Теорема.

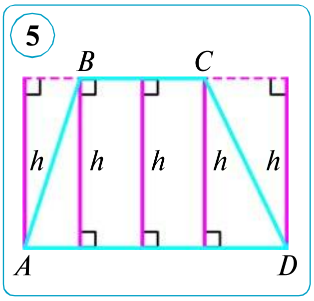
Высота равнобедренной трапеции, опущенная из вершины тупого угла, делит большее основание трапеции на части, равные полуразности и полусумме оснований, то есть:

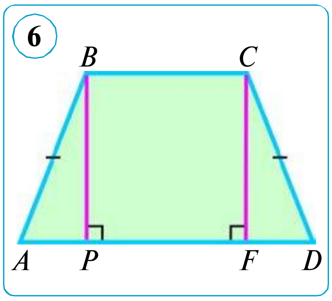
$$AP = \frac{a-b}{2}, \quad PD = \frac{a+b}{2}.$$

Доказательство. Опустим из вершины C $CF \perp AD$. Прямоугольные треугольники ABP и DCF равны, так как равны их гипотенузы: $AB = DC$ (по условию) и катеты: $BP = CF$ (как расстояния между параллельными прямыми BC и AD.) Из равенства треугольников следует, что $AP = FD$. Прямые BP и CF, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны. Тогда $BC = PF = b$. Итак,

$$AP = FD = \frac{AD - PF}{2} = \frac{a-b}{2}, \quad PD = AD - AP = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$







Таким образом, $AP = \frac{a-b}{2}$ и $PD = \frac{a+b}{2}$.

Что и требовалось доказать.

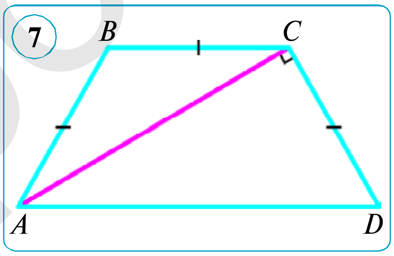
Задача 1. Докажите, что в равнобедренной трапеции равны углы при основаниях.

Решение. Пусть $ABCD$ – равнобедренная трапеция, т.е. $AB = DC$ и $AD \parallel BC$. Докажем, что в равнобедренной трапеции равны углы при основаниях AD и BC ($\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$).

Проведем высоты из вершин (B и C) тупых углов к основанию AD: $BP \perp AD$, $CF \perp AD$ (см. рис. 6). Рассмотрим прямоугольные треугольники ABP и DCF. У них $AB = DC$, как боковые стороны равнобедренной трапеции, $BP = CF$, как расстояния между параллельными прямыми BC и AD. Следовательно, $\triangle ABP = \triangle DCF$ по гипотенузе и катету. Отсюда следует, что $\angle A = \angle D$.

Углы трапеции A и B, C и D являются внутренними односторонними углами, при параллельных прямых AD и BC и секущими AB и CD соответственно, поэтому $\angle A + \angle B = 180°$ и $\angle C + \angle D = 180°$. Отсюда следует, что $\angle B = \angle C$. Таким образом, углы при основании равнобедренной трапеции равны: $\angle A = \angle D$ и $\angle B = \angle C$. Что и требовалось доказать.

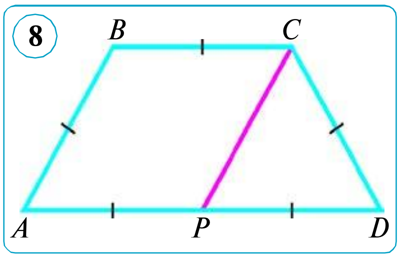
Задача 2. Меньшее основание равнобокой трапеции равно боковой стороне, а диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите углы трапеции.



Решение. Пусть дана равнобокая трапеция $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, $AB = BC = CD$, $AC \perp CD$ (рис. 7). По условию задачи треугольник ABC равнобедренный с основанием AC, следовательно, $\angle BCA = \angle CAB$. Но $\angle A = \angle D$, как углы при основании равнобокой трапеции, а $\angle CAD = \angle BCA$, как внутренние накрест лежащие углы при $AD \parallel BC$ и секущей AC. Значит, $\angle A = 2\angle CAD$. Далее, по условию треугольник ACD – прямоугольный, так что $\angle CAD + \angle D = 90°$, но так как $\angle D = \angle A$, то $90° = 3\angle CAD$, следовательно, $\angle CAD = 30°$ и тогда $\angle D = \angle A = 60°$, $\angle C = \angle B = 120°$.

Ответ: $\angle A = \angle D = 60°$, $\angle B = \angle C = 120°$.

Задача 3. Отношение сторон равнобедренной трапеции равно 1 : 1 : 1 : 2. Найдите углы этой трапеции.



Решение. Пусть в трапеции $ABCD$ $AB = BC = CD = 1$ и $AD = 2$. Обозначим через P середину стороны AD (рис. 8). В четырехугольнике $ABCP$ противоположные стороны AP и BC равны и параллельны. Значит, этот четырехугольник – параллелограмм, и, следовательно, $PC = AB = 1$.

В треугольнике PCD все стороны равны 1, поэтому $\angle PDC = 60^\circ$. Таким образом, в трапеции $ABCD$ $\angle A = \angle D = 60^\circ$ и $\angle B = \angle C = 120^\circ$.

Ответ: $\angle A = \angle D = 60^\circ$, $\angle B = \angle C = 120^\circ$.

Вопросы, задачи и задания

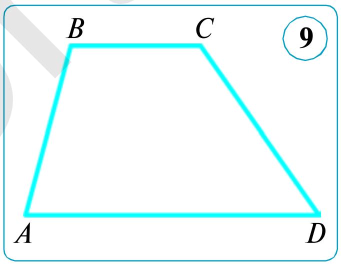
1. 1) Какой четырехугольник называется трапецией? Какие стороны называются: а) основаниями; б) боковыми сторонами?
2) Какая трапеция называется: а) равнобедренной; б) прямоугольной?

2. Высота трапеции, не проходящая через его вершину, разбивает трапецию на две прямоугольные трапеции. Покажите это на чертеже.

3. Боковые стороны прямоугольной трапеции относятся как $1:2$. Найдите наибольший угол трапеции.

4. Основания трапеции равны 12 cm и 20 cm, а боковые стороны 4 cm и 11 cm. Из конца меньшего основания проведена прямая, параллельная меньшей боковой стороне. Найдите периметр отсеченного треугольника.

5. Углы A и D при основании трапеции $ABCD$ равны 75° и 55° (рис. 9). Найдите градусные меры остальных ее углов. Заполните пропуски.



9

Решение. Углы A и B, C и D являются односторонними при пересечении параллельных прямых AD и BC секущими ... и ... . Следовательно, $\angle A + \angle B = ...^\circ$ и $\angle C + \angle D = ...^\circ$. Так как по условию $\angle A = 75^\circ$ и $\angle D = 55^\circ$, то $\angle B = ...^\circ - \angle A = ...^\circ - ...^\circ = ...^\circ$ и $\angle C = ...^\circ - \angle D = ...^\circ - ...^\circ = ...^\circ$.

Ответ: $\angle B = ...^\circ$, $\angle C = ...^\circ$.

6. Найдите основания равнобедренной трапеции, если один из ее углов равен 60°, длина боковой стороны 16 cm, а сумма длин оснований 38 cm.

7. В равнобедренной трапеции высота, проведенная из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки 3 cm и 17 cm. Найдите основания трапеции.

8. Докажите, что диагонали равнобедренной трапеции равны.

9. Может ли в трапеции быть: 1) три прямых угла; 2) три острых угла; 3) сумма трех углов равной 180°? Обоснуйте ответы.

10. Найдите углы прямоугольной трапеции, если отношение наибольшего и наименьшего их них равно $5:4$.

11. Найдите неизвестные углы равнобедренной трапеции, в которой высота, проведенная из вершины тупого угла, образует с боковой стороной угол 19°.

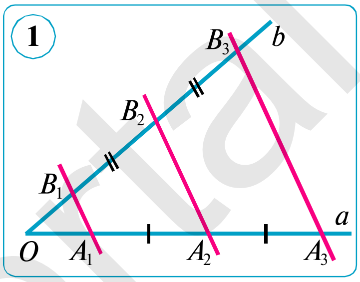
12. Диагональ равнобедренной трапеции делит пополам ее тупой угол. Найдите периметр трапеции, если ее основания равны 10 cm и 20 cm.

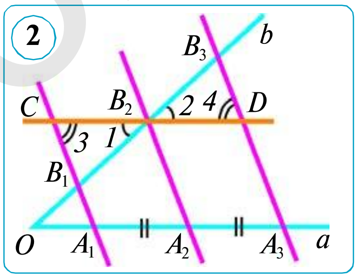
§ 2. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

9. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

Теорема.

Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.





Доказательство. Пусть на стороне (луче) a угла aOb с вершиной O отложены равные отрезки A_1A_2 и A_2A_3, и через их концы (A_1, A_2, A_3) проведены параллельные прямые A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3, пересекающие сторону (луча) b в точках B_1, B_2, B_3 (рис. 1).

Теперь докажем, что полученные отрезки B_1B_2 и B_2B_3 равны, т.е. если $A_1A_2 = A_2A_3$, то $B_1B_2 = B_2B_3$.

Проведем через точку B_2 прямую CD, параллельную лучу a (рис. 2). Пусть эта прямая пересекает прямые A_1B_1 и A_3B_3 в точках C и D. Четырехугольники $A_1CB_2A_2$ и $A_2B_2DA_3$ – параллелограммы по определению, так как по условию противоположные стороны равны и по построению параллельны.

По условию $A_1A_2 = A_2A_3$, $A_1A_2 = CB_2$ и $A_2A_3 = B_2D$, как противоположные стороны параллелограмма. Следовательно, $CB_2 = B_2D$.

Рассмотрим треугольники B_1B_2C и B_3B_2D. У них $CB_2 = B_2D$ по доказанному, $\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные, а $\angle 3 = \angle 4$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых A_1B_1 и A_3B_3 и секущей CD.

Следовательно, $\triangle B_1B_2C = \triangle B_3B_2D$ по второму признаку равенства треугольников, откуда $B_1B_2 = B_2B_3$.

Таким образом, если $A_1A_2 = A_2A_3$, то $B_1B_2 = B_2B_3$. Теорема доказана.

Примечание! *Обратим внимание, что в условии теоремы Фалеса вместо сторон угла можно рассматривать любые две произвольные прямые, при этом заключение теоремы будет то же.*

Поэтому теорема Фалеса может формулироваться и следующим образом.

Следствие. **Параллельные прямые, пересекающие две данные прямые и отсекающие на одной прямой равные отрезки, отсекают равные отрезки и на другой прямой.**

Задача 1. (*Деление отрезка на равные части.*) Разделим отрезок AB на n равных частей.

Решение. Пусть дан отрезок AB. Покажем, как разделить его на n равных частей. Для этого из точки A проведем луч AC не лежащий на прямой AB, и на нем от точки A отложим последовательно n равных отрезков AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, т.е. столько, на сколько равных частей нужно разделить данный отрезок AB (рис. 3, $n = 6$). Проведем прямую A_nB (точка A_n – конец последнего отрезка) и параллельные ей прямые через точки A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}. По теореме Фалеса эти прямые делят отрезок AB в точках B_1, B_2, B_3, ..., B_{n-1} на n равных частей: $AB_1 = B_1B_2 = ... = B_{n-1}B$.

Аналогично, можно разделить произвольный отрезок на любое количество равных частей.

Задача 2. В треугольнике ABC сторона BC разделена на четыре равные части, и через полученные точки деления проведены прямые, параллельные стороне AB равной 18 cm. Найдите отрезки прямых, заключенные внутри треугольника.

Дано: в $\triangle ABC$: $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3C$, $AB = 18$ cm;

$B_1C_3 \parallel B_2C_2 \parallel B_3C_1 \parallel AB$.

Найти: B_1C_3, B_2C_2, B_3C_1 (рис. 4).

Решение. 1) Проведем $A_1B_3 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_1 \parallel AC$.

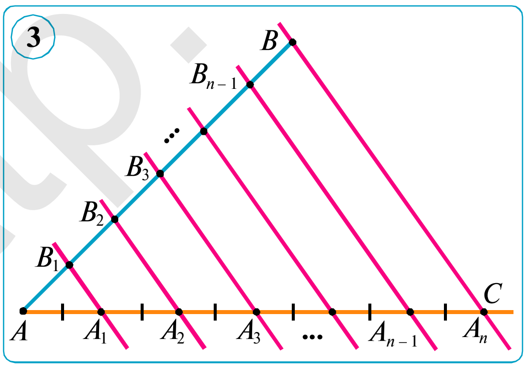
2) По теореме Фалеса:

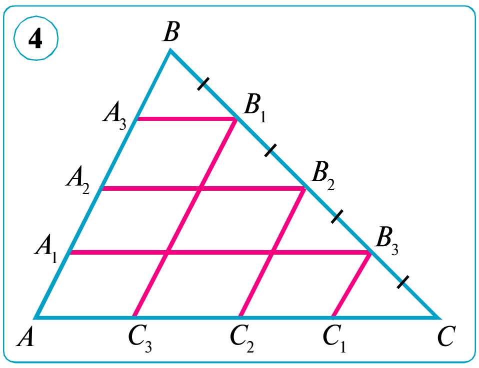
$$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3B = AB : 4 = 18 : 4 = 4{,}5 \text{ (cm)}.$$

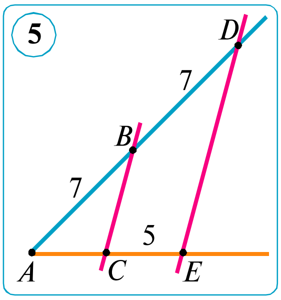
3) Четырехугольник $AA_1B_3C_1$ – параллелограмм по определению, так как $AA_1 \parallel C_1B_3$ (по условию) и $A_1B_3 \parallel AC_1$ (по построению). Следовательно, $AA_1 = C_1B_3 = 4{,}5$ (cm).

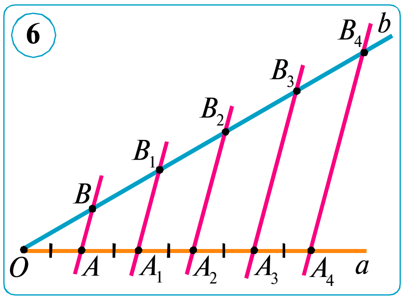
4) Четырехугольник $AA_2B_2C_2$ – параллелограмм по определению, так как $AA_2 \parallel C_2B_2$ (по условию) и $A_2B_2 \parallel AC_2$ (по построению). Следовательно,

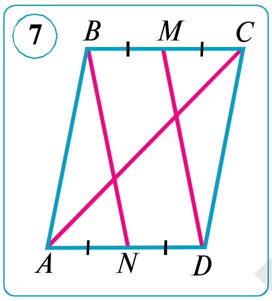
$$AA_2 = C_2B_2 = 2AA_1 = 2 \cdot 4{,}5 = 9 \text{ (cm)}.$$











5) Четырехугольник $AA_3B_1C_3$ – параллелограмм по определению, так как $AA_3 \parallel C_3B_1$ (по условию) и $A_3B_1 \parallel AC_3$ (по построению). Следовательно,

$$AA_3 = C_3B_1 = 3AA_1 = 3 \cdot 4{,}5 = 13{,}5 \text{ (cm)}.$$

Ответ: $C_1B_3 = 4{,}5$ cm, $C_2B_2 = 9$ cm, $C_3B_1 = 13{,}5$ cm.

Вопросы, задачи и задания

1. 1) Сформулируйте теорему Фалеса.
2) Как, используя теорему Фалеса, разделить отрезок на *n* равных частей?

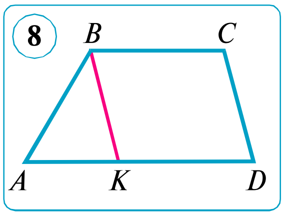
2. Разделите с помощью циркуля и линейки отрезок AB: 1) на две равные части; 2) на три равные части; 3) на шесть равных частей.

3. *Дано*: $\angle A$, $AB = BD = 7$ cm, $BC \parallel DE$, $CE = 5$ cm (рис. 5).
Найти: AC.

4. *Дано:* $\angle aOb$, $OA = AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$,
$AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$, $OB_4 = 8$ cm (рис. 6).
Найти: OB_1, OB_2, OB_3.

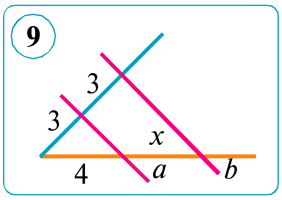
5. Точки M и N – середины сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$. Докажите. что прямые BN и MD делят диагональ AC на три равные части (рис. 7).

6. В трапеции $ABCD$ через вершину B проведена прямая BK, параллельная стороне CD (рис. 8).
1) Докажите, что $KBCD$ – параллелограмм.
2) Найдите периметр трапеции, если $BC = 4$ cm, $P_{ABK} = 11$ cm.



7. Разделите данный отрезок AB: 1) на четыре равные части; 2) на пять равных частей.

8. По данным рисунка 9 найдите x, если $a \parallel b$.



9. *Дано:* $\angle aOb$, $OA = AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$,
$AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$, $OB_4 - B_3B_4 = 18$ cm (см. рис. 6).
Найти: OB_1, OB_2, OB_3.

10–11. СВОЙСТВО СРЕДНЕЙ ЛИНИИ ТРЕУГОЛЬНИКА. СВОЙСТВО СРЕДНЕЙ ЛИНИИ ТРАПЕЦИИ

1. Свойство средней линии треугольника.

Определение. ***Средней линией*** *треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.*

Пусть в треугольнике ABC точки D и E – середины сторон AB и BC соответственно, т.е. $AD = DB$ и $CE = EB$. Соединим эти точки отрезком DE. Относительно средней линии DE сторона AC является *основанием треугольника* (рис. 1). В любом треугольнике имеются три средние линии (рис. 2).

Теорема 1.

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

Дано: в $\triangle ABC$: $AD = DB$, $CE = EB$, DE – средняя линия (рис. 2).

Требуется доказать: 1) $DE \parallel AC$; 2) $DE = \frac{1}{2}AC$.

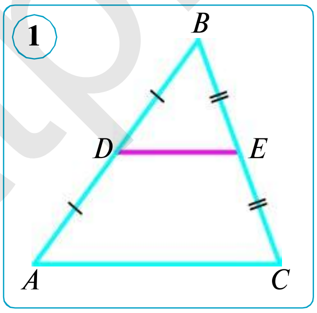
Доказательство. 1) Пусть DE – средняя линия треугольника ABC. Проведем через точку D прямую, параллельную AC. По теореме Фалеса она пересекает отрезок BC в его середине, т.е. содержит среднюю линию DE. Значит, средняя линия DE параллельна стороне AC.

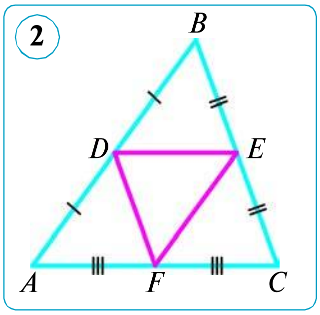
2) Проведем теперь среднюю линию EF. По только что доказанному она будет параллельна стороне AB, т.е. $EF \parallel AB$, отсюда $EF \parallel AD$. Четырехугольник $ADEF$ с попарно параллельными сторонами по определению является параллелограммом, откуда $DE = AF$. А поскольку F – середина AC, то $DE = \frac{1}{2}AC$. Что и требовалось доказать.

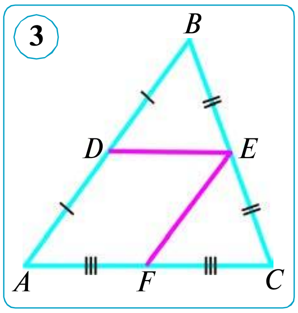
Задача. Периметр треугольника равен p, середины сторон соединены отрезками. Найдите периметр получившегося треугольника.

Решение. Стороны получившегося треугольника являются средними линиями исходного треугольника (рис. 3). Следовательно, они равны половинам соответствующих сторон. Поэтому искомый периметр равен половине периметра исходного треугольника, т.е.:

$P_{DEF} = DE + EF + FD = 0{,}5(AC + AB + BC) = 0{,}5p$. *Ответ:* $0{,}5p$.







2. Свойство средней линии трапеции.

Определение. ***Средней линией трапеции*** *называется отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон.*

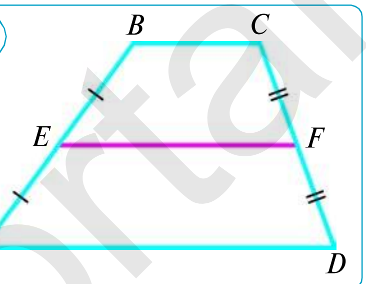
Пусть дана трапеция $ABCD$, где AD и BC – основания трапеции; точки E и F – середины боковых сторон (рис. 4). Тогда EF – средняя линия трапеции.

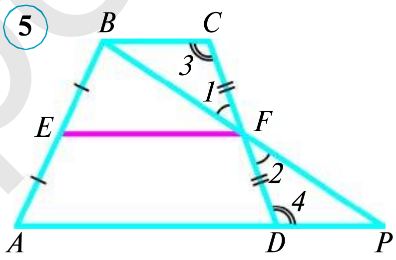
Теорема 2.

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Доказательство. Пусть EF – средняя линия трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) с основаниями AD и BC. Проведем прямую BF и отметим точку P – точку пересечения BF и AD (рис. 5). Треугольники BCF и PDF равны по второму признаку равенства треугольников ($CF = DF$ по условию, $\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные, $\angle 3 = \angle 4$ как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущей CD). Из равенства этих треугольников следует, что $BF = PF$ и, значит, EF – средняя линия треугольника ABP. Из теоремы о средней линии треугольника следует, что

$$EF \parallel AP \text{ и } EF = \frac{1}{2} AP.$$

4


5


Так как $AD \parallel BC$, то EF будет параллельна обоим основаниям и, кроме того,

$$EF = \frac{1}{2} AP = \frac{1}{2}(AD + DP) = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

Значит, $EF \parallel AD \parallel BC$ и

$EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$. Теорема доказана.

Следствие. Прямая, проходящая через середину боковой стороны трапеции и параллельная основаниям, делит вторую боковую сторону пополам.

Докажите это самостоятельно.

Вопросы, задачи и задания

1. 1) Что называется средней линией треугольника?

? 2) Что называется средней линией трапеции?

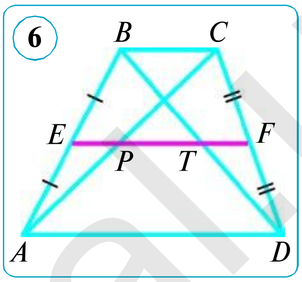
2. Стороны треугольника равны 5 cm, 7 cm и 11 cm. Найдите стороны треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

3. Найдите стороны треугольника, средние линии которого равны 6 cm, 7 cm и 9 cm соответственно.

4. Диагонали трапеции делят ее среднюю линию EF на отрезки, длины которых равны 5 cm, 7 cm и 4 cm (рис. 6). Найдите длины оснований тапеции. Заполните пропуски.

Решение. В треугольнике ABC отрезок EP является ... . Следовательно, $BC = 2 \cdot$ ... cm = = ... cm (по свойству ...). В треугольнике ACD отрезок PF является ... . PF = ... + ... = = ... cm + ... cm = ... cm.

Поэтому $AD = 2 \cdot$ ... cm = ... cm. *Ответ:* ... cm, ... cm.



5. Каждая из сторон треугольника ABC разделена на три равных отрезка, и точки деления соединены отрезками. Найдите периметр образовавшейся при этом фигуры (рис. 7), если периметр исходного треугольника равен p.

6. Основания трапеции равны: 1) 4,5 dm и 8,2 dm; 2) 9 cm и 21 cm. Чему равна длина средней линии трапеции?

7. В трапеции $ABCD$ (рис. 8) отрезок EF параллелен стороне CD, а точка E – середина AB. Докажите, что $EF = 0{,}5CD$.

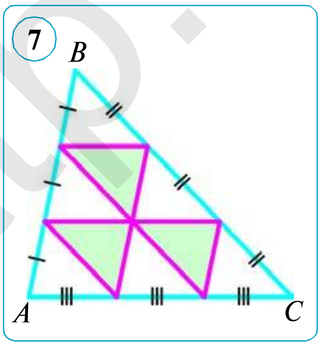
8. Вычислите неизвестные длины на рисунке 9.

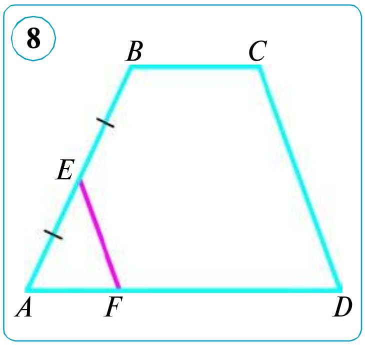
9. Диагонали трапеции делят ее среднюю линию на части, каждая из которых равна 6 cm. Найдите основания трапеции.

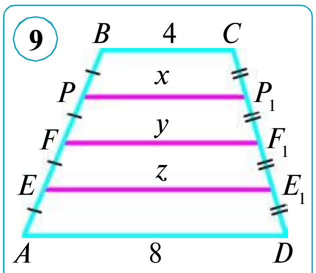
10. В равнобедренной трапеции диагональ длиной 6 cm образует с основанием угол 60°. Найдите среднюю линию трапеции.

11. Большее основание трапеции в 3 раза больше меньшего. Найдите основания трапеции, если средняя линия равна 20 cm.

12. Периметр трапеции 40 cm, сумма не параллельных сторон равна 16 cm. Найдите среднюю линию трапеции.







$ABCD$ – трапеция.
Найти: x, y, z.

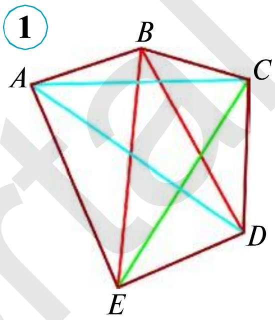
12. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

I. Задачи для исследования.

Задача 1. Постройте многоугольник, имеющий n сторон, если: 1) $n = 5$; 2) $n = 7$; 3) $n = 8$. Рассуждая, выводим формулу для вычисления числа разных диагоналей (d_n) многоугольника.

Решение. 1) $n = 5$. Из вершины A выходит по **2** диагонали: AC и AD, из вершины B выходит по **2** диагонали: BD и BE и т.д. Итак, из каждых пяти точек выходит по **2** диагонали (рис. 1).

1



Отсюда следует, что число диагоналей, исходящих из одной вершины выпуклого многоугольника, меньше чем число сторон (вершин) на три, т.е. равно $5 - 3 = 2$. Чтобы найти общее число всех диагоналей, исходящих из каждой вершины, число сторон умножим на **2**:

$$\mathbf{5 \cdot (5 - 3) = 5 \cdot 2 = 10}.$$

Но чтобы получить ответ, надо произведение $5 \cdot 2$ разделить на **2**, так как каждую из диагоналей в этих перечислениях засчитывали дважды (AC и CA, BD и DB и т.д. разные обозначения одной и той же диагонали, т.е. они не являются новыми):

$$5 \cdot 2 : 2 = \mathbf{5}.$$

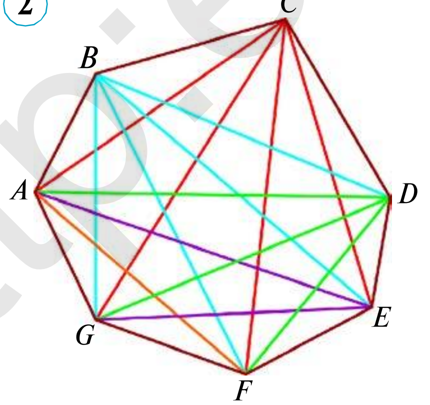
Число разных диагоналей выпуклого пятиугольника можно найти и так:

$$d_5 = \frac{5 \cdot (5-3)}{2} = \frac{5 \cdot \cancel{2}^{1}}{_{1}\cancel{2}} = \mathbf{5}.$$

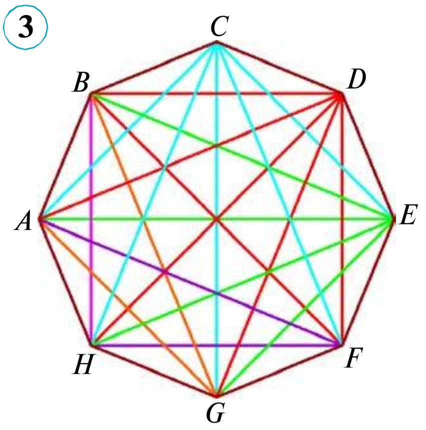
Ответ: 5.

2) $n = 7$. При решении задачи проводится аналогичное рассуждение. Учитывая найденную закономерность (по алгоритму), мы можем находить общее число разных диагоналей семиугольника, не проводя рассуждений (рис. 2):

2



3



$$d_7=\frac{7\cdot(7-3)}{2}=\frac{7\cdot\cancel{4}^{2}}{{}_{1}\cancel{2}}=\mathbf{14}.$$

Ответ: 14.

3) $n = 8$. При решении задачи проводится аналогичное рассуждение. Учитывая найденную закономерность (по алгоритму) мы можем находить общее число разных диагоналей восьмиугольника, не проводя рассуждений (рис. 3):

$$d_8=\frac{8\cdot(8-3)}{2}=\frac{{}^{4}\cancel{8}\cdot 5}{\cancel{2}_{1}}=\mathbf{20}.$$

Ответ: 20.

Итак, всего число разных диагоналей вычисляется по формуле:

$$\boldsymbol{d_n=\frac{n(n-3)}{2}}.$$

Примечание! ***Диагонали, исходящие из одной вершины в выпуклом n-угольнике, делят его на (n − 2) треугольника.***

Задача 2. Может ли число разных диагоналей многоугольника равно 25?

Решение. Число разных диагоналей n-угольника равно $d_n=\frac{n(n-3)}{2}$. Значит, $\frac{n(n-3)}{2}=25$. Тогда $n(n-3)=50$ или $n(n-3)=2\cdot5\cdot5$. Отсюда видно, что число 50 нельзя выразить произведением двух разных натуральных чисел, различающихся на 3. Поэтому у многоугольника число разных диагоналей равным 25 не может быть.

Ответ: нет, не существует.

Задача 3. В кабинете математики 15 чертежей треугольников и четырехугольников. Число всех сторон этих многоугольников равно 53. Сколько треугольников и сколько четырехугольников на чертежах?

Решение. Количество сторон четырехугольников при любых натуральных значениях кратно четырем. Чтобы сумма была нечетная, т.е. количество треугольников должно быть нечетным числом.

Составим уравнение по условию задачи: $3x + 4y = 53$.

Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1. Пусть $x = 1$ и $y = 14$. Тогда $3\cdot1+4\cdot14=53$, т.е. $59\neq53$.

Случай 2. Пусть $x = 3$ и $y = 13$. Тогда $3\cdot3+4\cdot12=53$, т.е. $57\neq53$.

Случай 3. Пусть $x = 5$ и $y = 10$. Тогда $3\cdot5+4\cdot10=53$, т.е. $55\neq53$.

Случай 4. Пусть $x = \mathbf{7}$ и $y = \mathbf{8}$. Тогда $3\cdot7+4\cdot8=53$, т.е. $53=53$.

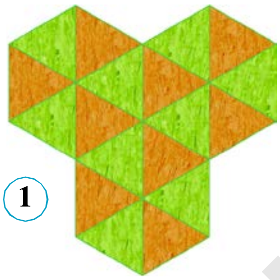
Условие задачи выполнено, поэтому другие случаи не рассматриваются. *Ответ:* **7** треугольников, **8** четырехугольников.

Дополнительные задания для самостоятельного решения:

1. В выпуклом многоугольнике число диагоналей, исходящих из одной вершины, равно 13. Чему равно число сторон этого многоугольника? Число всех его диагоналей?
2. Существует ли многоугольник: 1) число диагоналей которого равно числу его сторон; 2) число диагоналей которого больше числа его сторон?

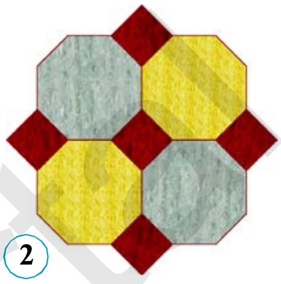
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ, РАЗВИВАЮЩИЙ ПРАКТИЧЕСКИЕ КОМПЕТЕНЦИИ

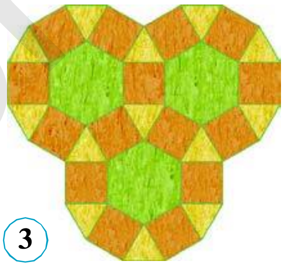
ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНЫЕ ПАРКЕТЫ


1

Вы, конечно, знаете, что такое паркет. Обычно паркет выкладывают из дощечек, имеющих форму прямоугольника, и чаще всего «елочкой» и т.д.

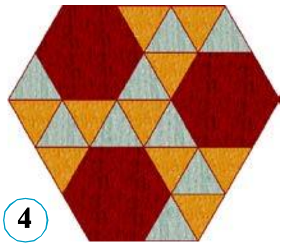
С точки зрения математики паркет — это покрытие плоскости геометрическими фигурами без зазоров и пересечений. Рассмотрим сначала паркеты из правильных многоугольников — треугольника, четырехугольника и шестиугольника. Самый простой пример паркета, составленного из одинаковых квадратов, — это ваша тетрадь в клеточку. На рис. 1 изображен паркет из правильных треугольников; на рис. 2 паркет из правильных четырехугольников и шестиугольников; на рис. 3 паркет из треугольников, четырехугольников и шестиугольников; на рис. 4 паркет из треугольников и шестиугольников.


2

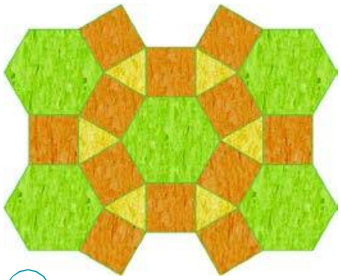

3

Паркетом называется такое заполнение плоскости многоугольниками, при котором любые два многоугольника либо имеют общую сторону, либо имеют общую вершину, либо не имеют общих точек.

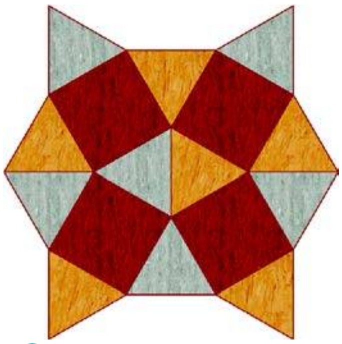
Паркет называется *правильным*, если он состоит из правильных многоугольников и вокруг каждой вершины правильные многоугольники расположены одним и тем же способом.


4

Примеры правильных паркетов дают заполнения плоскости: правильными треугольниками; квадратами и правильными шестиугольниками. Докажем, что другими равными правильными многоугольниками заполнить плоскость нельзя. Восполь-



5



6

зуемся тем, что сумма углов многоугольников, сходящихся в одной вершине паркета, должна быть равна 360°.

Рассмотрим правильные пятиугольники. Углы правильного пятиугольника равны 108°. В одной вершине паркета не может сходиться три правильных пятиугольника, так как сумма углов в этом случае будет $324° < 360°$. Если же число правильных пятиугольников больше или равно 4, то сумма углов будет больше или равна $432° > 360°$. Поэтому не существует правильного паркета из пятиугольников. Аналогично, в одной вершине не может сходится три или более правильных семиугольников, восьмиугольников и т.д., так как их углы больше 120° и в сумме они будут составлять величину, большую 360°. Поэтому не существует правильных паркетов из семиугольников, восьмиугольников и т.д. На рис. 5 изображен паркет из треугольников ($60° + 90° + 90° + 120° = 360°$), четырехугольников и шестиугольников, но он отличается от рис. 3 набором углов; на рис. 6 изображен паркет из правильных треугольников и квадратов. Попробуйте нарисовать паркеты изображенные на рис. 5 и 6.

Расширим способы составления паркетов из правильных многоугольников, разрешив использовать многоугольники с различным числом сторон. Обозначим через α_1, α_2, ... углы правильных многоугольников, имеющих общую вершину. Расположим их в порядке возрастания. Учитывая, что сумма всех таких углов должна быть равна 360°, составим таблицу, содержащую возможные наборы таких углов, и укажем соответствующие паркеты.

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots = 360°$
60°	60°	60°	60°	60°	60°	Паркет из треугольников
60°	60°	120°	120°			Паркет из треугольников и шестиугольников
60°	90°	90°	120°			Паркет из треугольников, четырехугольников и шестиугольников
60°	150°	150°				Паркет из треугольников и двенадцатиугольников
90°	90°	90°	90°			Паркет из квадратов
120°	120°	120°				Паркет из шестиугольников

13–14. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 1. РАБОТА НАД ОШИБКАМИ

1. Длины двух сторон прямоугольника относятся как 3 : 5, а его периметр равен 40 cm. Найдите стороны прямоугольника.

2. Периметр параллелограмма равен 30 cm. Найдите стороны параллелограмма, если одна из сторон в 4 раза больше другой.

3. В прямоугольной трапеции острый угол равен 45°. Найдите большее основание, если меньшая боковая сторона и меньшее основание равны 16 см.

4. В трапеции $ABCD$ AD – большее основание. Через вершину B проведена прямая, параллельная стороне CD и пересекающая сторону AD в точке E, $BC = 7$ cm, $AE = 4$ cm. Найдите: 1) среднюю линию трапеции; 2) периметр трапеции, если $P_{ABE} = 17$ cm.

ТЕСТ 1 Проверьте себя!

1. Один из углов выпуклого четырехугольника – прямой, а остальные относятся как 3 : 4 : 8. Найдите наименьший угол четырехугольника.
А) 72°; Б) 54°; В) 144°; Г) 90°.

2. Сколько углов имеет выпуклый многоугольник, каждый угол которого равен 156°?
А) 10; Б) 15; В) 12; Г) 8.

3. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 32 cm, а длина диагонали BD равна 9 cm. Найдите периметр треугольника ABD.
А) 16 cm; Б) 25 cm; В) 23 cm; Г) 41 cm.

4. Найдите наибольший угол параллелограмма, если сумма двух из них равна 100°.
А) 120°; Б) 110°; В) 150°; Г) 130°.

5. Найдите периметр ромба, у которого один из углов равен 150°, а меньшая диагональ равна 4,5 cm.
А) 27 cm; Б) 18 cm; В) 13 cm; Г) 21,5 cm.

6. Средняя линия трапеции $ABCD$ делит ее на две трапеции, средние линии которых равны 13 cm и 17 cm. Найдите большее основание трапеции.
А) 19 cm; Б) 21 cm; В) 18 cm; Г) 30 cm.

7. Средняя линия меньше основания на 5,4 cm. Найдите сумму длин средней линии и основания треугольника.
А) 13,5 cm; Б) 16,2 cm; В) 10,8 cm; Г) 21,6 cm.

8. Периметр равнобедренной трапеции 36 cm, средняя линия 10 cm. Найдите длину боковой стороны.
А) 10 cm; Б) 8 cm; В) 12 cm; Г) 13 cm.

9. Средняя линия трапеции 9 cm, одно из ее оснований меньше второго на 6 cm. Найдите большее основание трапеции.
А) 15 cm; Б) 18 cm; В) 12 cm; Г) 10 cm.

Изучаем английский язык!

Многоугольник – polygon	**Периметр** – perimeter
Прямоугольниик – rectangle	**Диагональ** – diagonal
Ромб – rhombus	**Параллелограмм** – parallelogramm
Квадрат – square	**Трапеция** – trapezoid
Высота – height	**Угол** – angle

Исторические сведения

Абу Райхан Беруни
(973–1048)

В математике Древнего Египта и Древнего Вавилона рассматривались следующие виды четырехугольников: квадраты, прямоугольники, прямоугольные и равнобедренные трапеции. Наш великий предок, среднеазиатский ученый **Абу Райхан Беруни** также подробно рассматривал различные виды четырехугольников. В своем сочинении «Книга вразумления начаткам науки о звездах» Беруни следующим образом отвечает на вопрос: «Какие виды четырехугольников существуют?»:

*«**Первый** из них – квадрат, у которого все стороны равны, все углы прямые, а диагонали, т.е. отрезки, соединяющие противоположные углы (вершины), равны между собой.*

***Второй** – прямоугольник, который по сравнению с квадратом более вытянут, все углы прямые, равны лишь противоположные стороны и диагонали.*

***Третий** – ромб, у которого все четыре стороны равны, но различны длины диагоналей, и углы, в общем случае, не являются прямыми.*

***Четвертый** – ромбоид, у которого различны диагонали, а противоположные стороны попарно равны.*

Отличные от этих фигур четырехугольники называются трапециями»

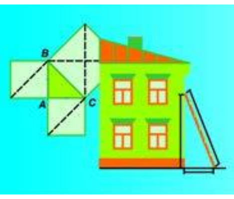
Слово «***quadratus***» (***квадрат***) в переводе с латинского означает «*четырехугольник*». Беруни использовал арабский термин «*murabba*», который и был переведен в средние века на латинский язык. По-арабски прямоугольник – это «*mustatil*» – «растянутый».

Как появился термин ***ромб*** объясняется по-разному. В переводе с греческого слово «*rhombus*» означает «*волчок*» или «*тело вращения*». Этот термин вошел в геометрию, так как сечение волчка похоже на ромб. Термин «*muayyan*» переводится с арабского как «*ромб*».

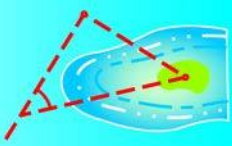
У Беруни ***трапеция*** названа как «*muxarrif*», это дословный перевод «*trapedzion*» с греческого на арабский.

Термин «***параллелограмм***» происходит от греческого слово «*parallelos*» + «*grammos*», что означает «*прямоугольная площадь*».

По-арабски *параллелограмм* – это «*mutavozi al-azla*», переводится как «*имеющий параллельные основания*».



ГЛАВА II
СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ



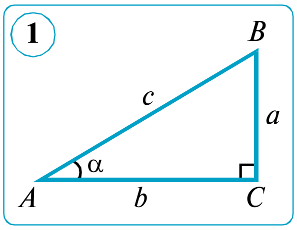
§ 3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОСТРОГО УГЛА

15. СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС ОСТРОГО УГЛА

Начиная с этого параграфа и до конца главы мы будем изучать большой и важный раздел геометрии, который называется **тригонометрией**. Познакомимся с основными понятиями тригонометрии, соотношениями между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике. Слово «**тригонометрия**» — в переводе с греческого языка означает «**измерение треугольников**».

Главную задачу тригонометрии составляет *решение треугольников*. Треугольник — важнейшая геометрическая фигура. Поэтому продолжим изучение треугольников. Основная цель этой главы — выразить одни элементы треугольников (стороны и углы) через другие его элементы.

Пусть ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом C и острым углом при вершине A, равным α; $BC = a$, $AC = b$ — катеты, $AB = c$ — гипотенуза (рис. 1).



Возьмем отношения его сторон попарно:

$\frac{a}{c}$ — отношение катета, противолежащего углу α, к гипотенузе;

$\frac{b}{c}$ — отношение катета, прилежащего к углу α, к гипотенузе;

$\frac{a}{b}$ — отношение катета, противолежащего углу α, к катету прилежащему;

$\frac{b}{a}$ — отношение катета, прилежащего к углу α, к катету противолежащему;

$\frac{c}{b}$ — отношение гипотенузы к катету, прилежащему к углу α;

$\frac{c}{a}$ — отношение гипотенузы к катету, противолежащему углу α.

Таким образом, мы получили 6 отношений.

Таким же образом, можно составить отношения для второго острого угла (B). Наиболее используемыми являются первые четыре функции, которые имеют специальные названия: синус, косинус, тангенс и котангенс.

Определение 1. **Синусом** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Синус угла α обозначается так: **sin**α и читается «*синус альфа*».

По определению:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

Определение 2. **Косинусом** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Косинус угла α обозначается так: **cos**α и читается «*косинус альфа*».

По определению:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Определение 3. **Тангенсом** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему.

Тангенс угла α обозначается так: **tg**α и читается «*тангенс альфа*».

По определению:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}.$$

Определение 4. **Котангенсом** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к противолежащему.

Котангенс угла α обозначается так: **ctg**α и читается «*котангенс альфа*».

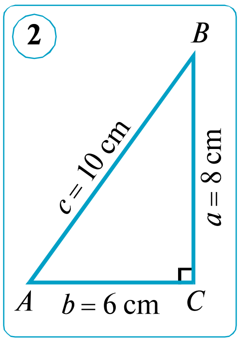
По определению:

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Поскольку катет прямоугольного треугольника меньше гипотенузы, то ***синус и косинус острого угла меньше единицы***.

В прямоугольном треугольнике могут быть равны катеты, один из катетов больше другого или меньше другого. Поэтому, значения тангенса и котангенса может быть ***меньше единицы***, ***равно единице и больше единицы***.

Задача. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AB = 10$ cm, $BC = 8$ cm, $AC = 6$ cm (рис. 2). Найдите значения тригонометрических функций угла A.



Решение. По определению:

$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{8}{10} = 0{,}8$; $\mathrm{tg}A = \frac{{}^4\cancel{8}}{\cancel{6}_3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$;

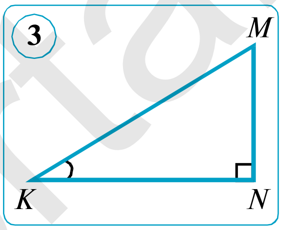
$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{10} = 0{,}6$; $\mathrm{ctg}A = \frac{{}^3\cancel{6}}{\cancel{8}_4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$;

Ответ: $\sin A = 0{,}8$; $\cos A = 0{,}6$; $\mathrm{tg}A = 1\frac{1}{3}$; $\mathrm{ctg}A = 0{,}75$.

Вопросы, задачи и задания

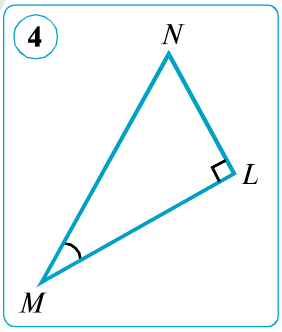
1. 1) Какие отношения можно составить из сторон прямоугольного треугольника и как они читаются?
2) Что называется синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом острого угла прямоугольного треугольника и как они обозначаются?

2. Определите, какая тригонометрическая функция угла K выражается дробью (рис. 3):
а) $\frac{KN}{KM}$; б) $\frac{MN}{KN}$; в) $\frac{MN}{KM}$; г) $\frac{KN}{MN}$?



3. В $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $AB = 6$ cm, $BC = 5$ cm, $AC = \sqrt{11}$ cm (см. рис. 1). Найдите значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов A и B.

4. Может ли синус острого угла прямоугольного треугольника быть равным:
а) 0,98; б) $\sqrt{2}$; в) $\sqrt{5} - 2$?



5. В прямоугольном треугольнике MNL $\sin N = \frac{24}{25}$. Какие стороны треугольника можно найти из этого равенства (рис. 4)?

6. В треугольнике MNL $\angle L = 90°$, $MN = 13$ cm, $ML = 12$ cm, $NL = 5$ cm (рис. 4). Найдите значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла M.

7. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $AB = 17$ cm, $BC = 8$ cm, $AC = 15$ cm. Найдите значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов A и B.

Знать это полезно!

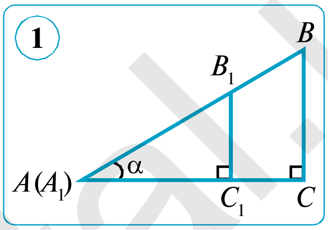
- ***«Синус»*** *— латинский перевод арабского слова «джайб» — пазуха, вырез платья. Это слово, в свою очередь, происходит от индейского «джина» — тетива лука, хорда, а именно в древних индейских математических трактатах.*
- ***«Тангенс»*** *— в переводе с латинского «касательный».*
- ***«Косинус»*** *и* ***«котангес»*** *— от латинского «комплиментари синус» и «комплиментари тангенс» — «дополнительный синус» и «дополнительный тангенс».*

16. СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС ОСТРОГО УГЛА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

1. Тригонометрические функции острого угла.

Покажем, что в прямоугольном треугольнике синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла зависят только от величины острого угла и не зависят от выбора прямоугольного треугольника.

Пусть прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ ($\angle C = \angle C_1 = 90°$) имеют равные острые углы A и A_1 (рис. 1).



По основному свойству пропорции:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1};\quad \frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1};\quad \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1};\quad \frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1}.$$

Правая и левая части этого равенства по определению равны синусам, косинусам, тангенсам и котангенсам острых углов A и A_1.

Значит,

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1} = \sin A_1,\quad \mathrm{tg}A = \frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1} = \mathrm{tg}A_1,$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1} = \cos A_1,\quad \mathrm{ctg}A = \frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \mathrm{ctg}A_1.$$

Отсюда видно, синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла A не зависит от выбора треугольника. Если значение острых углов изменится, то и изменятся соответственно значения этих соотношений.

Таким образом, **тригонометрические функции острого угла зависят только от величины угла.**

Синус, косинус, тангенс и котангенс называют ***тригонометрическими функциями острого угла***.

Имеет место еще один важный факт:

если значения некоторой тригонометрической функции для острых углов A и A_1 равны, то $\angle A = \angle A_1$.

Иначе говоря, ***каждому значению тригонометрической функции соответствует единственный острый угол***.

2. Выражение тангенса и котангенса через синус и косинус.

Непосредственно из определений синуса и косинуса имеем:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{c}\cdot\frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \mathrm{tg}\alpha,\ \text{т.е.}\ \mathbf{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\qquad (1)$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a} = \frac{b}{a} = \mathrm{ctg}\alpha,\ \text{т.е.}\ \mathbf{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.\qquad (2)$$

Тангенс *острого угла равен отношению синуса к косинусу этого угла.*

Котангенс *острого угла равен отношению косинуса к синусу этого угла.*

Умножим почленно равенства (1) и (2), получим:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1. \qquad (3)$$

Значит, произведение **тангенса и котангенса для острого угла α равно единице**.

Отсюда следует, что тангенс и котангенс для острого угла α являются взаимно обратными функциями.

Таким образом, мы вывели три новых **равенства** (**тождества**), которые выражают зависимость между тригонометрическими функциями острого угла α.

3. Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике.

Из определения тригонометрических функций вытекает:

Правило 1. Катет, противолежащий углу α, равен произведению гипотенузы на $\sin\alpha$:

$$a = c\sin\alpha.$$

Правило 2. Катет, противолежащий углу α, равен произведению второго катета на $\operatorname{tg}\alpha$:

$$a = b\operatorname{tg}\alpha.$$

Правило 3. Катет, прилежащий к углу α, равен произведению гипотенузы на $\cos\alpha$:

$$b = c\cos\alpha.$$

Правило 4. Катет, прилежащий к углу α, равен отношению второго катета на $\operatorname{tg}\alpha$:

$$b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Правило 5. Гипотенуза равна отношению катета, противолежащему углу α на $\sin\alpha$:

$$c = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Правило 6. Гипотенуза равна отношению катета, прилежащему к углу α на $\cos\alpha$:

$$c = \frac{b}{\cos\alpha}.$$

Задача. В треугольнике ABC угол C равен 90°. Вычислите: 1) длину катета BC если $AB = 18$ cm и $\sin A = \frac{1}{3}$; 2) длину катета AC, если $AB = 9$ cm и $\cos A = \frac{2}{7}$; 3) длину гипотенузы AB, если $AC = 15$ cm и $\cos A = \frac{5}{6}$; 4) длину катета AC, если $BC = 26$ cm и $\operatorname{tg}A = \frac{13}{15}$.

Решение. 1) Используя правило 1, находим катет BC:

$$BC = AB\sin A = {}^{6}\cancel{18} \cdot \frac{1}{\cancel{3}_1} = 6 \text{ (cm)}.$$

Ответ: 6 cm.

2) Используя правило 3, находим катет AC:

$$AC = AB\cos A = 9\cdot\frac{2}{7} = \frac{18}{7} = 2\frac{4}{7}\ \text{(cm)}.$$

Ответ: $2\frac{4}{7}$ cm.

3) Используя правило 6, находим гипотенузу AB:

$$AB = \frac{AC}{\cos A} = 15 : \frac{5}{6} = {}^{3}\cancel{15}\cdot\frac{6}{\cancel{5}_{1}} = 3\cdot 6 = 18\ \text{(cm)}.$$

Ответ: 18 cm.

4) Используя правило 4, находим катет AC:

$$AC = \frac{BC}{\mathrm{tg}A} = 26 : \frac{13}{15} = {}^{2}\cancel{26}\cdot\frac{15}{\cancel{13}_{1}} = 2\cdot 15 = 30\ \text{(cm)}.$$

Ответ: 30 cm.

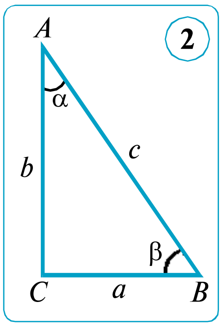
Вопросы, задачи и задания

1. 1) Что называются тригонометрическими функциями острого угла?
2) От чего зависит величина синуса, косинуса, тангенса и котангенса?
3) Как можно выразить тангенс и котангенс острого угла через синус и косинус того же острого угла? Запишите соответствующие формулы.

2. Определите, какие из данных равенств верны (рис. 2). Обоснуйте ответ.

а) $c = \frac{a}{\sin\alpha}$; в) $c = a\,\mathrm{tg}\alpha$;

б) $b = c\sin\alpha$; г) $a = \frac{b}{\mathrm{ctg}\alpha}$.



3. Может ли тангенс острого угла прямоугольного треугольника быть равным $\sqrt{2}$; 0,001; 100? Обоснуйте ответ.

4. В треугольнике ABC угол C равен 90°. Вычислите:

1) катет AC, если $BC = 10$ cm и $\mathrm{tg}A = \frac{5}{8}$;

2) гипотенузу AB, если $BC = 8$ cm и $\sin A = 0{,}16$.

5. Выведите 6 отношений между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике для угла β (рис. 2).

6. В треугольнике ABC угол C равен 90°. Вычислите длину гипотенузы AB, если $BC = 4$ cm и $\sin A = 0{,}25$.

7. В треугольнике ABC угол C равен 90°. Вычислите длину гипотенузы AB, если $AC = 2$ cm и $\cos A = 0{,}4$.

8. В треугольнике ABC угол C равен 90°. Вычислите длину гипотенузы AB, если $BC = 14$ cm и $\cos B = \frac{7}{25}$.

§ 4. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

17. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА И ЕЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

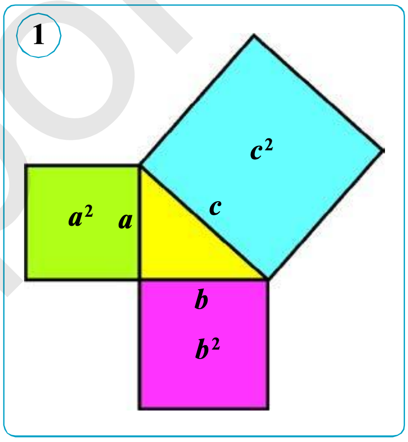
1. Теорема Пифагора – одна из важнейших теорем геометрии.

Очень мало сведений сохранилось в истории о жизни великого греческого математика **Пифагора**. Из древнегреческих источников нам известно, что математики школы Пифагора при доказательствах теорем и решении задач занимались классификацией геометрических фигур и заменой прямолинейных фигур на равновеликие им фигуры. В частности, велик вклад Пифагора и математиков его школы в применении геометрии как науки. Ниже приводится теорема, которая носит имя Пифагора.

Теорема.

(Теорема Пифагора.) **В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.**

Эта теорема показывает связь между площадями квадратов со сторонами, равным сторонам прямоугольных треугольников. Пифагор предложил теоретическое обоснование этого утверждения. Частные случаи теоремы были известны в Древнем Египте и Вавилоне, но именно школой Пифагора была дана общая формулировка теоремы.



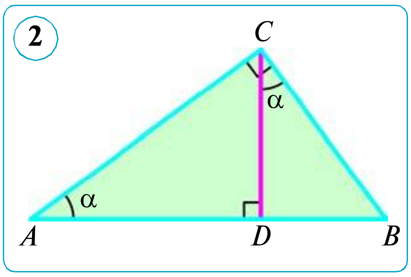
Пусть дан прямоугольный треугольник ABC с катетами a и b, и гипотенузой c. Тогда утверждение теоремы Пифагора можно выразить формулой

$$c^2 = a^2 + b^2, \qquad (1)$$

где a^2, b^2, c^2 – площади квадратов со сторонами a, b, c. Поэтому это равенство означает, что **площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах** (рис. 1).

2. Доказательство теоремы Пифагора через косинус острого угла.

Доказательство. Пусть ABC – прямоугольный треугольник с прямым углом C. Проведем высоту CD из вершины прямого угла C (рис. 2).



По определению косинуса угла A из прямоугольных треугольников ACD и ABC имеем:

$$\cos A = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}.$$

Отсюда $AD \cdot AB = AC^2$ (2).

Аналогично, по определению косинуса угла B из прямоугольных треугольников BCD и ABC, имеем:

$$\cos B = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}.$$

Отсюда $BD \cdot AB = BC^2$ (3).

Складывая полученные равенства (2) и (3) почленно и учитывая, $AD + DB = AB$, получим:

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + BD \cdot AB = AB \cdot (AD + BD) \cdot AB = AB^2.$$

Теорема доказана.

Обозначим стороны прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) соответственно $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Тогда в силу теоремы Пифагора будет иметь место формула:

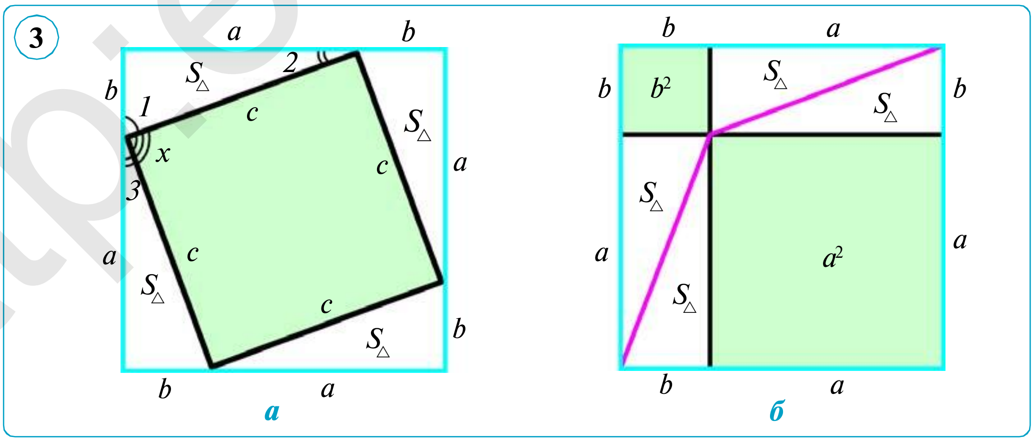
$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}.$$

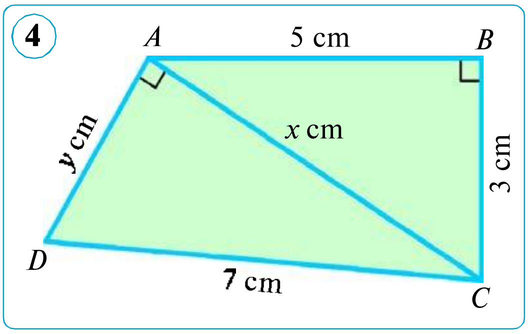
3. Доказательство теоремы Пифагора через свойства площадей.

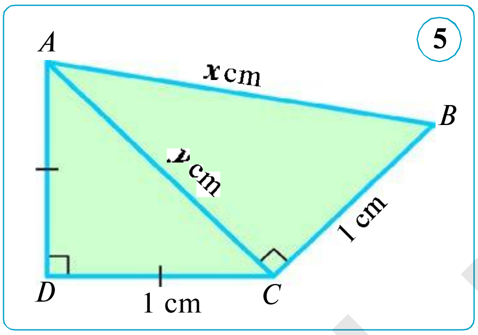
Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c. Докажем, что

$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}.$$

Доказательство. Построим два равных квадрата, стороны которых равны: $a + b$. Разделим его на части, состоящие из прямоугольных треугольников, квадратов и прямоугольника (рис. 3). Покажем, что этот четырехугольник – квадрат со стороной c (рис. 3, *а*). Действительно, во-первых этот четырехугольник является ромбом, так как стороны у него равны гипотенузе c прямоугольного треугольника с катетами a и b. Покажем, что угол x на рисунке прямой. Действительно, $\angle x + \angle 1 + \angle 3 = 180°$, $\angle 3 = \angle 2$ (так как треугольники равны) и $\angle 1 = 90° - \angle 2$, следовательно: $\angle x = 90°$. Поэтому данный четырехугольник – ромб, один из углов которого равен 90°, т. е. квадрат. Так как оба больших







квадрата равновелики, т.е. их площади равны, то площадь первого, равна $4S_{\triangle} + c^2$, равна площади второго, равной $4S_{\triangle} + a^2 + b^2$ (рис. 3, *б*). Откуда,

$$4S_{\triangle} + c^2 = 4S_{\triangle} + a^2 + b^2.$$

Значит, $c^2 = a^2 + b^2$. Теорема доказана.

Задача. Найдите неизвестную длину отрезка на рис. 4.

Решение. 1) $\triangle ABC$ – прямоугольный, $\angle B = 90^\circ$ (рис. 4). По теореме Пифагора: $x^2 = 5^2 + 3^2$, откуда $x^2 = 34 \Rightarrow x = \sqrt{34}$ $(x > 0)$.

2) $\triangle ACD$ – прямоугольный, $\angle CAD = 90^\circ$ (рис. 4). По теореме Пифагора, $y^2 + (\sqrt{34})^2 = 7^2$, откуда $y^2 + 34 = 49$, $y^2 = 15$, $y = \sqrt{15}$ $(y > 0)$.

Ответ: $x = \sqrt{34}$ cm; $y = \sqrt{15}$ cm.

Вопросы, задачи и задания

1. 1) Какие доказательства теоремы Пифагора вы знаете?

2) Что вы понимаете под выражениями «квадрат гипотенузы», «квадрат катета»?

2. В прямоугольном треугольнике заданы катеты a и b. Найдите гипотенузу c, если: 1) $a = 5$, $b = 12$; 2) $a = 4\sqrt{2}$, $b = 7$; 3) $a = 0{,}7$, $b = 2{,}4$; 4) $a = 5$, $b = 6$; 5) $a = \frac{5}{13}$, $b = \frac{12}{13}$.

Указание. Вычислите гипотенузу, используя формулу:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

3. Найдите периметр ромба, если его диагонали равны:
1) 12 cm и 16 cm; 2) 14 cm и 48 cm.

4. Найдите неизвестную длину отрезка x (рис. 5).

5. В прямоугольном треугольнике a и b – катеты, а c – гипотенуза. Найдите b, если: 1) $a = 1{,}2$, $c = 1{,}3$; 2) $a = 7$, $c = 9$; 3) $a = 1{,}5$, $c = 1{,}7$; 4) $a = 2$, $c = 2{,}5$.

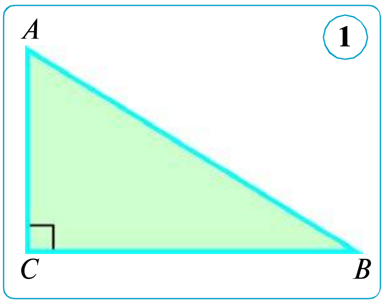
6. Найдите диагональ прямоугольника, если его стороны равны:
1) 2,4 dm и 7 cm; 2) 50 cm и 12 dm; 3) 8 dm и 1,5 m.

18. ТЕОРЕМА, ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМЕ ПИФАГОРА

1. Некоторые непосредственные следствия из теоремы Пифагора.

Рассмотрим одно из непосредственных следствий теоремы Пифагора.

Следствие. В прямоугольном треугольнике любой катет меньше гипотенузы.



Доказательство. $\triangle ABC$ − прямоугольный, $\angle C = 90°$ (рис. 1).

Докажем, что любой катет меньше гипотенузы.

Действительно, по теореме Пифагора:

$AC^2 = AB^2 - BC^2$ и $BC^2 = AB^2 - AC^2$.

Откуда $AC^2 < AB^2$ и $BC^2 < AB^2$.

Значит, $AC < AB$ и $BC < AB$.

Следствие доказано.

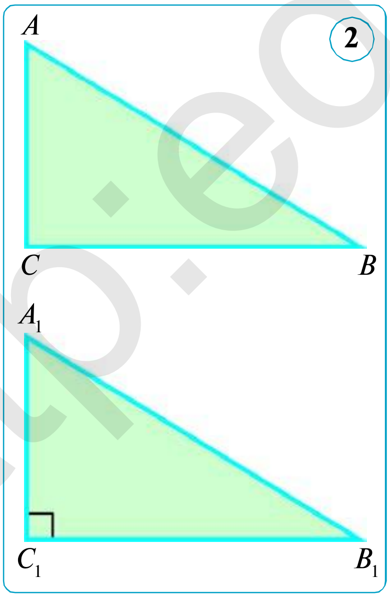
2. Теорема, обратная теореме Пифагора.

Теорема.

Если квадрат одной стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон, то треугольник − прямоугольный.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Докажем, что $\angle C = 90°$ (рис. 2). Рассмотрим прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ с прямым углом C_1, в котором $A_1C_1 = AC$ и $B_1C_1 = BC$.



По теореме Пифагора $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$, и, значит, $A_1B_1^2 = AC^2 + BC^2$.

Но $AB^2 = AC^2 + BC^2$ по условию теоремы, значит, $A_1B_1^2 = AB^2$. Откуда следует, что $A_1B_1 = AB$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам. Поэтому $\angle C = \angle C_1$, т.е. треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C. Теорема доказана.

Задача 1. Стороны треугольника равны: 1) $a = 5$, $b = 11$, $c = 12$; 2) $a = \sqrt{85}$, $b = 7$, $c = 6$. Является ли этот треугольник прямоугольным?

Решение. 1) Вычислим сумму квадратов двух наименьших сторон:

$$5^2 + 11^2 = 25 + 121 = 146.$$

Теперь вычислим квадрат наибольшей стороны: $12^2 = 144$.

Сравнивая полученные результаты, имеем $a^2 + b^2 \neq c^2$. Значит, треугольник не является прямоугольным.

Ответ: при $a = 5$, $b = 11$ и $c = 12$, не будет прямоугольным.

2) Вычислим сумму квадратов двух наименьших сторон:

$$7^2 + 6^2 = 49 + 36 = 85.$$

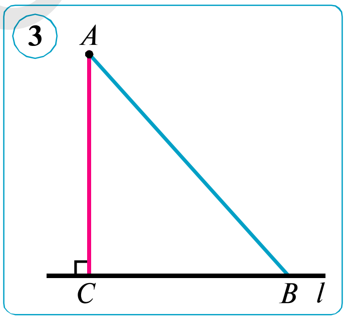
Теперь вычислим квадрат наибольшей стороны: $\left(\sqrt{85}\right)^2 = 85$.

Значит, $85 = 85$ – справедливо. В результате имеем $b^2 + c^2 = a^2$. Откуда делаем вывод, что этот треугольник – прямоугольный.

Ответ: $a = \sqrt{85}$, $b = 7$ и $c = 6$, треугольник прямоугольный.

3. Перпендикуляр и наклонная.

Пусть точка A не лежит на прямой l, AC – перпендикуляр к этой прямой. Любой отрезок, соединяющей точку A с точкой принадлежащей прямой l и не совпадающей с перпендикуляром, называют ***наклонной*** к прямой l. По определению, кратчайшее расстояние от точки A до прямой l будет равно длине ***перпендикуляра*** AC, опущенного из точки A на прямую l (рис. 3).



Действительно, для каждой точки $B \in l$ треугольник ACB – прямоугольный, где AC и CB – катеты, а AB – гипотенуза. Отрезок CB называют ***проекцией наклонной*** AB на данную прямую l.

Теорема Пифагора связывает длину наклонной AB, перпендикуляр AC и проекции CB равенством: $AB^2 = AC^2 + CB^2$.

Поэтому *всегда* $AB > AC$ или $AB > BC$, иначе говоря, *перпендикуляр короче наклонной, проведенной из той же точки* или *любая наклонная больше перпендикуляра и больше своей проекции на данную прямую.*

Так же, *равные наклонные имеют равные проекции*; *из двух наклонных больше та, которая имеет большую проекцию.*

Задача 2. Найдите стороны ромба, если его диагонали равны 10 cm и 24 cm.

Решение. Воспользуемся тем, что диагонали ромба перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам. Тогда стороны ромба являются гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами 5 cm и 12 cm.

$$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169, \text{ т.е. } 169 = 13^2.$$

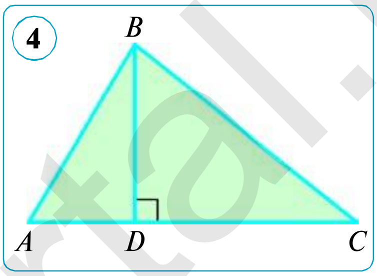
Значит, сторона ромба равна 13 cm. *Ответ:* 13 cm.

Вопросы, задачи и задания

1. 1) Сформулируйте теорему, обратную теореме Пифагора.
2) Что вы понимаете под выражением проекция наклонной на прямую? Верно ли, что катет меньше гипотенузы?

2. Может ли прямоугольный треугольник иметь стороны равные: 1) 11 cm, 7 cm, 17 cm; 2) 3 cm, 1,6 cm, 3,4 cm; 3) 3 cm, 4 cm, 6 cm; 4) 2 cm, $\sqrt{7}$ cm, $\sqrt{11}$ cm? В каждом случае обоснуйте ответ.

3. В $\triangle ABC$ $AB = 13$ cm, $BC = 20$ cm, BD – высота треугольника, и она равна 12 cm. Вычислите длины проекций сторон AB, BC на сторону AC и длину стороны AC (рис. 4). Заполните пропуски.



Решение. $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ – прямоугольные, так как $\angle ADB = \angle BDC = 90°$. Проекциями сторон AB и BC на сторону AC, соответственно являются отрезки AD и CD.

По теореме Пифагора из треугольника ABD, имеем:

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = 13^2 - ...^2 = ... - ... = ... \text{ (cm)}.$$

Отсюда $AD = ...$ cm.

По теореме Пифагора из треугольника BCD, имеем:

$$CD^2 = BC^2 - BD^2 = ...^2 - 12^2 = ... - ... = ... \text{ (cm)}.$$

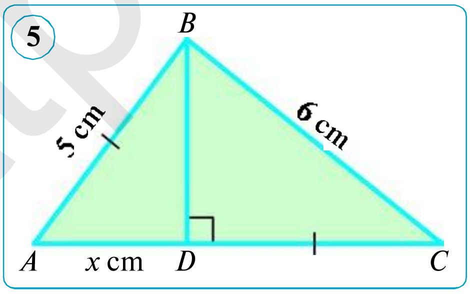
Отсюда $CD = ...$ cm. $AC = ... + DC = ... + ... = ...$ (cm).

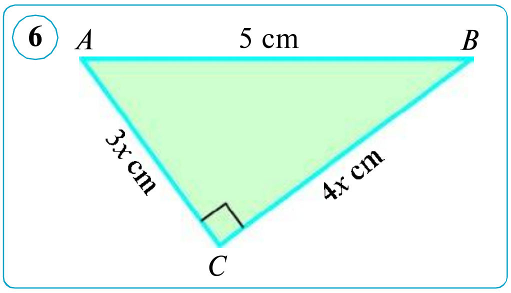
Ответ: $AD = ...$ cm, $CD = ...$ cm, $AC = ...$ cm.

4. Найдите неизвестную длину (рис. 5–6).

5. Две стороны прямоугольного треугольника равны 6 cm и 8 cm. Найдите длину третьей стороны. Сколько решений имеет задача?

6. Может ли прямоугольный треугольник иметь стороны равные: 1) $a = 12$, $b = 35$, $c = 37$; 2) $a = 11$, $b = 20$, $c = 25$; 3) $a = 18$, $b = 24$, $c = 30$; 4) $a = 9$, $b = 12$, $c = 15$? В каждом случае обоснуйте ответ.





19. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ПИФАГОРА

Нахождение высоты треугольника по трем сторонам.

Рассмотрим треугольник ABC со сторонами a, b и c. Найдем высоту $CD = h_c$, опущенную из вершины C на сторону AB (рис. 1, *а*).

Рассматриваются три случая в зависимости от расположения основания высоты D на стороне AB.

Случай 1. Пусть точка D — внутренняя точка отрезка AB и длина $AD = x$, тогда длина $DB = c - x$ (рис. 1, *а*). $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$ — прямоугольные, и по теореме Пифагора:

$$h_c^2 = b^2 - x^2 \quad (1) \quad \text{и} \quad h_c^2 = a^2 - (c - x)^2 \quad (2).$$

Откуда: $b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$.

Следовательно,

$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2, \quad \text{т.е.} \quad b^2 = a^2 - c^2 + 2cx.$$

Из последнего уравнения находим x:

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \quad \text{или} \quad x^2 = \frac{\left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}{4c^2}.$$

Подставив это значение x^2 в равенство (1), имеем:

$$h_c^2 = b^2 - \frac{\left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}{4c^2} = \frac{4b^2c^2 - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)^2}{4c^2}.$$

Разложив числитель этой дроби на множители, получим следующее:

$$h_c^2 = \frac{\left(2bc - \left(b^2 + c^2 - a^2\right)\right)\left(2bc + \left(b^2 + c^2 - a^2\right)\right)}{4c^2} = \frac{\left(2bc - b^2 - c^2 + a^2\right)\left(2bc + b^2 + c^2 - a^2\right)}{4c^2}.$$

Преобразуем следующим образом оба множителя в числителе полученного выражения:

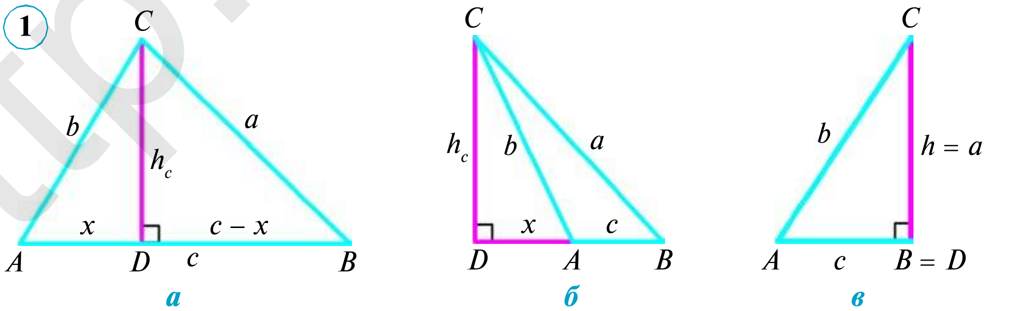
$$2bc - b^2 - c^2 + a^2 = a^2 - (b - c)^2 = (a - b + c)(a + b - c) \quad \text{и}$$

$$2bc + b^2 + c^2 - a^2 = (b + c)^2 - a^2 = (b + c - a)(b + c + a).$$

Тогда

$$h_c^2 = \frac{(a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(b + c + a)}{4c^2},$$

1



а *б* *в*

из этого

$$h_c = \frac{1}{2c}\sqrt{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)}\,.$$

Обозначив полупериметр треугольника через p, получим:

$$a + b + c = 2p,$$
$$a - b + c = a + b + c - 2b = 2p - 2b = 2(p - b),$$
$$a + b - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c),$$
$$b + c - a = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a).$$

Полученные выражения подставим вместо выражений, стоящих под корнем, и получим:

$$h_c = \frac{1}{2c}\sqrt{16p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2c}\cdot 4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$
$$= \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,.$$

Таким же образом,

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{и} \quad h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,.$$

Случай 2. Точка D лежит на продолжении отрезка AB, то есть $DB = c + x$. И в этом случае получим ранее изложенный результат (рис. 1, *б*).

Случай 3. Точка D совпадает с точкой B, то есть высота совпадает с катетом, $h = a$. В этом случае треугольник будет прямоугольным (рис. 1, *в*).

Вопросы, задачи и задания

1. Найдите высоты треугольника со сторонами: 1) 10 cm, 10 cm, 12 cm; 2) 17 dm, 17 dm, 16 dm; 3) 4 dm, 13 dm, 15 dm.

2. Найдите сторону равностороннего треугольника, высота которого равна h.

3. Найдите высоту, опущенную на большую сторону треугольника, если его стороны равны: 1) $a = 5$ cm, $b = 7$ cm, $c = 6$ cm; 2) $a = 13$ dm, $b = 14$ dm, $c = 15$ dm; 3) $a = 24$ cm, $b = 25$ cm, $c = 7$ cm.

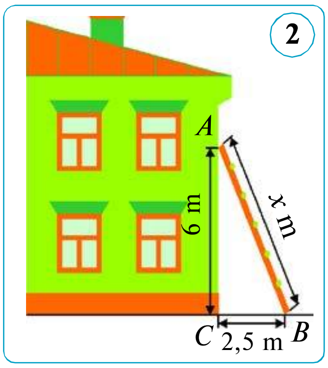
4. Найдите: 1) высоту равностороннего треугольника, если его сторона равна 12 cm; 2) сторону равностороннего треугольника, если его высота равна 15 cm.

5. Найдите наибольшую и наименьшую из высот треугольника, стороны которого равны $a = 8$ cm, $b = 10$ cm и $c = 12$ cm.

6. Найдите меньшую высоту треугольника, если его стороны равны: 1) 17, 65, 80; 2) 8, 6, 4; 3) 24, 25, 7; 4) 30, 34, 16.

7. Найдите меньшую высоту треугольника, если его стороны равны $a = 16$ cm, $b = 12$ cm и $c = 8$ cm.

8. Найдите длину лестницы (рис. 2).



§ 5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

20–21. ОСНОВНОЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ТОЖДЕСТВО И ЕГО СЛЕДСТВИЕ

1. Основные тригонометрические тождества.

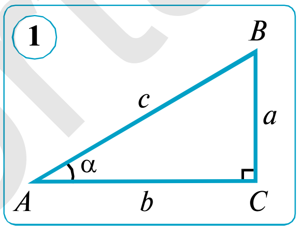
Выведем соотношения (тождества), которые выражают зависимость между тригонометрическими функциями одного угла.

Теорема.

Для любого острого угла α справедливо равенство

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Доказательство. Возьмем любой прямоугольный треугольник ABC с углом при вершине A, равным α (рис. 1).



По теореме Пифагора:

$$BC^2 + AC^2 = AB^2.$$

Разделим обе части равенства на AB^2. Получим следующее равенство:

$$\left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = 1.$$

Но $\frac{BC}{AB} = \sin\alpha$, $\frac{AC}{AB} = \cos\alpha$. Таким образом,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad (1)$$

Равенство (1) называется **основным тригонометрическим тождеством**.

Три тождества вы уже знаете:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \ (2), \qquad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \ (3), \qquad \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1 \ (4).$$

Чтобы получить пятое тождество, разделим обе части полученного тождества (1) на $\cos^2\alpha$. Получим:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \text{ или } 1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}. \qquad (5)$$

Если обе части тождества (1) разделить на $\sin^2\alpha$, то получим шестое тождество:

$$1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \text{ или } 1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \qquad (6)$$

2. Следствия, вытекающие из основного тригонометрического тождества.

Для любого острого угла α верны следующие равенства:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}. \qquad (7)$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}. \qquad (8)$$

Задача 1. Вычислите значение sinα, tgα и ctgα, если $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.

Решение. 1) $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

2) $\text{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3} : \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{5}}{2}$; 3) $\text{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2}{3} : \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Ответ: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\text{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\text{ctg}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Задача 2. Упростите выражение: 1) $1+\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$; 2) $1-\frac{\cos^2\alpha-1}{\cos^2\alpha}$.

Решение. 1) Приведем слагаемые к общему знаменателю, затем в числителе приведем подобные слагаемые, и воспользуемся тождеством (6):

$$1+\frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} = 1+\text{ctg}^2\alpha.$$

Ответ: $1 + \text{ctg}^2\alpha$.

2) Приведем разность к общему знаменателю, затем в числителе приведем подобные слагаемые, и воспользуемся тождеством (5):

$$1-\frac{\cos^2\alpha-1}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha-(\cos^2\alpha-1)}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha+1}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\text{tg}^2\alpha.$$

Ответ: $1 + \text{tg}^2\alpha$.

Задача 3. Упростите выражение: $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

Решение. Воспользуемся формулой квадрата суммы двух чисел и основного тригонометрического тождества, получим равенство:

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = 1.$$

Ответ: 1.

Вопросы, задачи и задания

1. 1) В чем заключается основное тригонометрическое тождество?
2) Какие тригонометрические тождества вы знаете?
3) Какие следствия вытекают из основного тригонометрического тождества?

2. Найдите: 1) cosα, tgα и ctgα, если $\sin\alpha = \frac{12}{13}$; 2) sinα, tgα и ctgα, если $\cos\alpha = 0{,}8$; 3) sinα, tgα и ctgα, если $\cos\alpha = 0{,}28$.

3. Найдите sinα и cosα, если $\text{tg}\alpha = \frac{5}{12}$.

Образец. Найдите sinα и cosα, если $\text{tg}\alpha = \frac{4}{3}$.

Решение. $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\text{tg}^2\alpha = 1+\left(\frac{4}{3}\right)^2 = 1+\frac{16}{9} = \frac{25}{9}$. Значит, $\cos^2\alpha = \frac{9}{25}$.

Откуда $\cos\alpha = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$.

Теперь вычислим sinα: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$.

Ответ: $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

4. Упростите выражение: 1) $1 + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$; 2) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; 3) $\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

Образец. Упростите выражение: $1 + \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$.

Решение. Сгруппировав слагаемые, получим:

$$1+\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = \underbrace{1-\cos^2\alpha}_{\sin^2\alpha} + \sin^2\alpha = \sin^2\alpha + \sin^2\alpha = 2\sin^2\alpha.$$

Ответ: $2\sin^2\alpha$.

5. Упростите выражение: 1) $\frac{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{\sin^2\alpha}$; 2) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}$; 3) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}$.

6. Катеты прямоугольного треугольника равны 7 cm и 24 cm. Вычислите синус, косинус, тангенс и котангенс наименьшего угла треугольника.

7. Найдите значения тригонометрических функций острого угла A, если: 1) $\operatorname{tg}A = 2$; 2) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos\alpha = \frac{15}{17}$.

8. Упростите выражение: $\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^4\alpha}{\cos^2\alpha}$.

Решение.

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^4\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}\left(1-\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^4\alpha\right) = \left(1+\operatorname{tg}^2\alpha\right)\left(1-\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^4\alpha\right) = 1+\operatorname{tg}^6\alpha.$$

Пользуясь тождеством (5) и формулой суммы кубов, т.е. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, упростили выражение.

Ответ: $1 + \operatorname{tg}^6\alpha$.

9. Найдите: 1) cosα, tgα и ctgα, если $\sin\alpha = \frac{8}{17}$; 2) sinα, tgα и ctgα, если $\cos\alpha = 0{,}6$.

10. Определите, могут ли синус и косинус одного угла соответственно быть равными: 1) $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$ и $\frac{3}{4}$.

11. Определите, могут ли тангенс и котангенс одного угла соответственно быть равными:

1) 0,4 и 2,5; 2) 1,1 и 0,9; 3) $\sqrt{5}+2$ и $\sqrt{5}-2$.

12. Упростите выражение: 1) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha - \cos^2\alpha$; 2) $\cos\alpha - \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha$.

13. Катеты прямоугольного треугольника равны 8 cm и 15 cm. Найдите значение тригонометрических функций наименьшего угла треугольника.

14. Упростите выражение: 1) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)$; 2) $\sin\alpha - \sin\alpha\cos^2\alpha$.

22. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ УГЛОВ

Формулы для тригонометрических функций дополнительных углов.

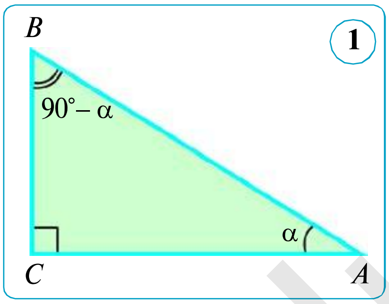
Дополнительными углами *называются два угла, которые в сумме составляют 90°.* Такими углами, в частности, являются острые углы прямоугольного треугольника.

Тригонометрические тождества, которые мы рассмотрели, устанавливают взаимосвязь между разными тригонометрическими функциями одного угла. Попробуем установить связь между функциями двух острых углов прямоугольного треугольника.

Теорема.

Для любого острого угла α в прямоугольном треугольнике справедливы равенства:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha; \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha.$$



Доказательство. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB (рис. 1). Если $\angle A = \alpha$, то $\angle B = 90^\circ - \alpha$. Выразив синусы и косинусы острых углов треугольника, получим:

$$\sin B = \frac{AC}{AB} \quad \text{и} \quad \cos A = \frac{AC}{AB}, \text{ т.е:}$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha;$$

$$\sin A = \frac{BC}{AB} \quad \text{и} \quad \cos B = \frac{BC}{AB}, \text{ т.е.:}$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha.$$

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекает следующее следствие.

Следствие. Для любого острого угла α в прямоугольном треугольнике справедливы равенства:

$$\mathrm{tg}(90^\circ - \alpha) = \mathrm{ctg}\alpha; \qquad \mathrm{ctg}(90^\circ - \alpha) = \mathrm{tg}\alpha.$$

Воспользуясь выше выведенными формулами, докажите самостоятельно справедливость этих равенств.

Острые углы A и B в прямоугольном треугольнике являются дополнительными углами, так как они дополняют друг друга до 90°. Учитывая это, выше выведенные формулы читаются так:

- **синус данного угла равен косинусу дополнительного угла;**
- **косинус данного угла равен синусу дополнительного угла;**
- **тангенс данного угла равен котангенсу дополнительного угла;**
- **котангенс данного угла равен тангенсу дополнительного угла.**

Задача 1. Углы A и B – острые углы прямоугольного треугольника. Найдите tg$A$, если $\sin B = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Решение. $\sin B = \cos A$, значит, $\cos A = \sin B = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Синус угла A находим, используя следствие из основного тригонометрического тождества:

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Находим тангенс угла через синус и косинус:

$$\mathrm{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{2}{\sqrt{5}} : \frac{1}{\sqrt{5}} = 2.$$

Ответ: 2.

Задача 2. Найдите острый угол x, если $\mathrm{ctg}x = \mathrm{tg}20^\circ$.

Решение. $\mathrm{tg}20^\circ = \mathrm{ctg}(90^\circ - 20^\circ) = \mathrm{ctg}70^\circ$, Значит, $\mathrm{ctg}x = \mathrm{ctg}70^\circ$. Отсюда $x = 70^\circ$. *Ответ:* $x = 70^\circ$.

Вопросы, задачи и задания

1. 1) Что называют дополнительными углами?
2) Какие связи вы знаете между функциями двух острых углов прямоугольного треугольника? Запишите соответствующие формулы.

2. Найдите острый угол x, если:
1) $\sin x = \cos 40^\circ$; 2) $\cos x = \sin 76^\circ$; 3) $\mathrm{tg}x = \mathrm{ctg}56^\circ$; 4) $\mathrm{ctg}x = \mathrm{tg}16^\circ$.

3. Углы A и B – острые углы прямоугольного треугольника. Найдите $\sin B$ и $\cos B$, если $\cos A = 0{,}6$.

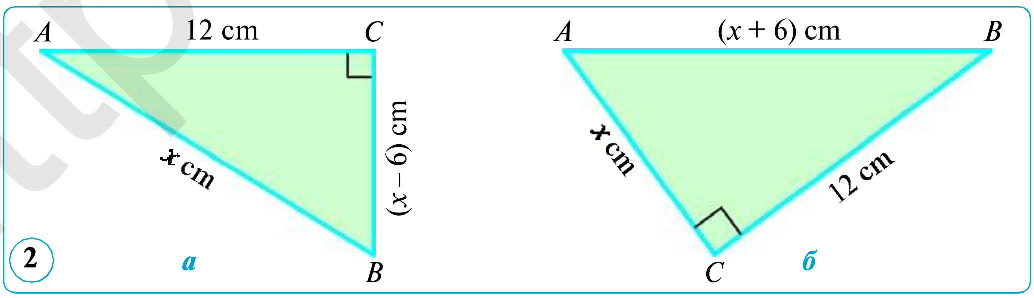
4. Определите, могут ли синус и косинус одного угла соответственно быть равными: 1) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\frac{2}{\sqrt{5}}$; 2) 0,3 и 0,4.

5. Углы A и B – острые углы прямоугольного треугольника. Найдите $\cos A$ и tg$A$, если $\sin B = 0{,}5$.

6. Найдите неизвестные длины (рис. 2), и вычислите синус, косинус, тангенс и котангенс острых углов.

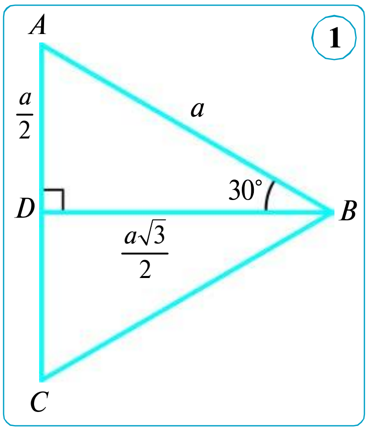
7. Найдите $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, если $\sin(90^\circ - \alpha) = 0{,}8$.

8. Упростите выражение: 1) $\frac{\cos\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha}$; 2) $\mathrm{ctg}^2\alpha(2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 1)$.



23. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЯ СИНУСА, КОСИНУСА, ТАНГЕНСА И КОТАНГЕНСА УГЛОВ 30°, 45°, 60°

1. Вычисление значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла 30°. Для вычисления значения тригонометрических функций угла 30° рассмотрим равносторонний треугольник ABC со стороной a и проведем в нем высоту BD, которая является также биссектрисой и медианой (рис. 1). В треугольнике ABD $\angle D = 90°$, $\angle B = 30°$ и $AB = a$. Тогда $AD = \frac{a}{2}$, как катет, лежащий против угла в 30°. По теореме Пифагора:



$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} =$$
$$= \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

По определению:

$$\sin 30° = \frac{AD}{AB} = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2};$$

$$\cos 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : a = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{AD}{BD} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

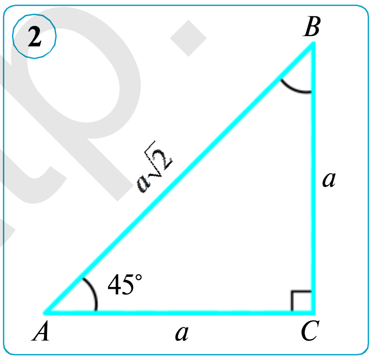
$$\operatorname{ctg} 30° = \frac{BD}{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a}{2} = \sqrt{3}.$$

С помощью формул для тригонометрических функций дополнительных углов получаем значения угла 60°:

$$\sin 60° = \sin(90° - 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \operatorname{tg} 60° = \operatorname{tg}(90° - 30°) = \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3};$$

$$\cos 60° = \cos(90° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}; \quad \operatorname{ctg} 60° = \operatorname{ctg}(90° - 30°) = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2. Вычисление значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла 45°.



Для вычисления значений тригонометрических функций угла 45° рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = BC = a$ и $\angle A = \angle B = 45°$ (рис. 2). По теореме Пифагора гипотенуза равна $AB = a\sqrt{2}$. По определению тригонометрических функций острого угла имеем:

$$\sin 45° = \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45° = \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\mathrm{tg} 45° = \mathrm{tg} A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a} = 1;$$

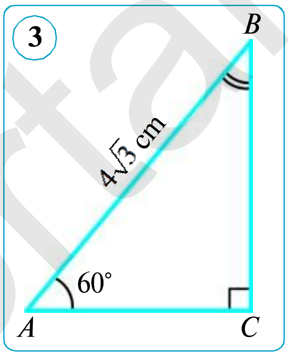
$$\mathrm{ctg} 45° = \mathrm{ctg} A = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a} = 1.$$

Представим значения тригонометрических функций углов 30°, 45° и 60° в виде таблицы.

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Значения тригонометрических функций других углов, а также квадрат и квадратный корень из положительных чисел можно вычислить с помощью калькулятора или специальных таблиц.

Задача. Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна $4\sqrt{3}$ cm, а $\angle A = 60°$ (рис. 3). Вычислите длины катетов этого треугольника.



Решение. Нам известно, что катет противолежащий углу α, равен произведению гипотенузы на $\sin\alpha$. Поэтому:

$$BC = AB\sin A = 4\sqrt{3}\cdot\sin 60° = 4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 6 \text{ (cm)}.$$

Нам известно, что катет прилежащий к углу α, равен произведению гипотенузы на $\cos\alpha$. Поэтому:

$$AC = AB\cos A = 4\sqrt{3}\cdot\cos 60° = 4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = 2\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

Ответ: $BC = 6$ cm, $AC = 2\sqrt{3}$ cm.

Вопросы, задачи и задания

1. Вычислите: 1) $\sin 30° + \mathrm{tg} 45°$; 2) $\cos 30° \cdot \mathrm{tg} 60°$; 3) $\sqrt{2}\sin 45° - \cos 60°$.

2. Начертите равносторонний треугольник и проведите его высоту. Сделайте необходимые измерения и вычислите значения тригонометрических функций углов 30° и 60°. Сравните полученные результаты с табличными.

3. Диагональ BD параллелограмма $ABCD$ перпендикулярна стороне AB и равна 16 cm. Вычислите длины сторон параллелограмма, если угол BDA равен 30°.

4. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен $6\sqrt{3}$, а противолежащий угол равен 60°. Найдите гипотенузу и второй катет.

5. Упростите выражение: 1) $\mathrm{tg}^2\alpha(2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 1)$; 2) $\mathrm{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha$.

6. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 2, а противолежащий угол равен 60°. Найдите гипотенузу и второй катет.

7. Упростите выражение: $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$.

8. Вычислите:
1) $\cos 45° \cdot \sin 45°$; 2) $\sin 60° \cdot \mathrm{tg} 30°$; 3) $\sqrt{3}\cos 30° - \cos 60°$.

§ 6. РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

24. ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Значения тригонометрических функций полностью определяются величиной угла. Составлены таблицы тригонометрических функций в зависимости от значений углов (см. приложение в конце книги). В таблице приведены значения тригонометрических функций углов, содержащих целое число градусов, с точностью до десятитысячных знака. Значение углов, не больше 45°, расположены в левом (1-ом) столбце «Градусы», и соответствующие им значения тригонометрических функций находят, пользуясь *верхними* наименованиями столбцов (2–5), значения угла, не меньше 45°, расположены в правом (6- ом) столбце «Градусы», и соответствующие им значения тригонометрических функций находят, пользуясь *нижними* наименованиями (2–5) столбцов. В двух крайних столбцах указаны градусные углы: в левом – от 1° до 45°, т.е. 1°, 2°, 3°, ..., 45°; в правом – от 45° до 89°, т.е. 45°, 46°, 47°, ... 89°. Таблица составлена с учетом формул дополнения: $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$, $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$ и т.д., значит, $\sin 1° = \cos 89°$, $\sin 2° = \cos 88°$ и т.д. Между этими столбцами содержится четыре (2–5) столбца значений тригонометрических функций:

2-й – синусы углов от 1° до 45° (или косинусы от 45° до 89°);
3-й – тангенсы углов от 1° до 45° (или котангенсы от 45° до 89°);
4-й – котангенсы углов от 1° до 45° (или тангенсы от 45° до 89°);
5-й – косинусы углов от 1° до 45° (или синусы от 45° до 89°).

1. Вычисление тригонометрической функции по углу.

Задача 1. Найдите sin20°.

Решение. Поскольку $1° \le 20° \le 45°$, найдем в крайнем левом столбце значение «градусы» 20 и рассмотрим соответствующую строку первого столбца значений. Угол 20° в ней соответствует числу 0,3420. Это и есть значение sin20°. Следовательно, $\sin 20° \approx 0{,}3420$.

Задача 2. Найдите sin75°.

Решение. Поскольку $45° \le 75° \le 89°$, найдем в крайнем *правом* столбце значение «градусы» 75 и рассмотрим соответствующую строку четвертого столбца значений. Угол 75° в ней соответствует числу 0,9659. Это и есть значение sin75°. Следовательно, $\sin 75° \approx 0{,}9659$.

Задача 3. Найдите cos33°.

Решение. Поскольку $1° \le 33° \le 45°$, найдем в крайнем левом столбце значение «градусы» 33 и рассмотрим соответствующую строку четвертого столбца значений. Угол 33° в ней соответствует числу 0,8387. Это и есть значение cos33°. Следовательно, $\cos 33° \approx 0{,}8387$.

Аналогично находим значения тригонометрических функций тангенса и котангенса, как соответственно значения синуса и косинуса.

2. Вычисление угла по его тригонометрической функции.

Задача 4. Найдите острый угол x, если $\sin x = 0{,}9848$.

Решение. Для этого в первом или четвертом столбце значений находим число 0,9848. Оно находится в четвертом столбце, т.е. искомый угол больше 45° и меньше 89°. В соответствующей строке правого столбца («градусы») значений находим число 80. Следовательно, искомый угол приблизительно равен 80°. *Ответ:* $x \approx 80°$.

Задача 5. Найдите острый угол x, если $\operatorname{tg} x = 0{,}7002$.

Решение. Для этого во втором или третьем столбце значений находим число 0,7002. Оно находится во втором столбце, искомый угол меньше 45°. В соответствующей строке левого столбца («градусы») значений находим число 35°. Следовательно, искомый угол приблизительно равен 35°.

Ответ: $x \approx 35°$.

Вопросы, задачи и задания

1. Найдите используя таблицу:

а) 1) $\sin 3°$; 2) $\sin 21°$; 3) $\sin 50°$; 4) $\sin 82°$; 5) $\sin 40°$;
б) 1) $\cos 9°$; 2) $\cos 12°$; 3) $\cos 41°$; 4) $\cos 67°$; 5) $\cos 4°$;
в) 1) $\operatorname{tg} 5°$; 2) $\operatorname{tg} 89°$; 3) $\operatorname{tg} 15°$; 4) $\operatorname{tg} 60°$; 5) $\operatorname{tg} 50°$;
г) 1) $\operatorname{ctg} 10°$; 2) $\operatorname{ctg} 30°$; 3) $\operatorname{ctg} 75°$; 4) $\operatorname{ctg} 52°$; 5) $\operatorname{ctg} 5°$.

2. Найдите острый угол x, используя таблицу:

а) 1) $\sin x \approx 0{,}1392$; 2) $\sin x \approx 0{,}8590$; 3) $\sin x \approx 0{,}5150$;
б) 1) $\cos x \approx 0{,}7431$; 2) $\cos x \approx 0{,}6428$; 3) $\cos x \approx 0{,}0523$;
в) 1) $\operatorname{tg} x \approx 0{,}4663$; 2) $\operatorname{tg} x \approx 11{,}430$; 3) $\operatorname{tg} x \approx 0{,}1763$;
г) 1) $\operatorname{ctg} x \approx 0{,}9004$; 2) $\operatorname{ctg} x \approx 1{,}192$; 3) $\operatorname{ctg} x \approx 0{,}3640$.

3. (*Практическая работа.*) Начертите с помощью транспортира прямоугольный треугольник с острым углом 40°. Измерьте его стороны и вычислите синус, косинус, тангенс и котангенс этого угла.

4. Вычислите значение выражения: $\operatorname{tg}15° \cdot \operatorname{tg}30° \cdot \operatorname{tg}60° \cdot \operatorname{tg}75°$.

Решение. Пользуясь формулами $\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$, вычислим значение выражения (заполните пропуски):

$$\operatorname{tg}15° \cdot \operatorname{tg}30° \cdot \operatorname{tg}60° \cdot \operatorname{tg}75° = \operatorname{tg}15° \cdot \operatorname{tg}30° \cdot \operatorname{tg}(90° - 30°) \cdot \operatorname{tg}(90° - 15°) =$$
$$= (\operatorname{tg}15° \cdot \operatorname{ctg}...°) \cdot (\operatorname{tg}30° \cdot \operatorname{ctg}...°) = ... \cdot ... = ...$$

5. Докажите, что $\operatorname{tg}1° \cdot \operatorname{tg}2° \cdot ... \cdot \operatorname{tg}88° \cdot \operatorname{tg}89° = 1$.

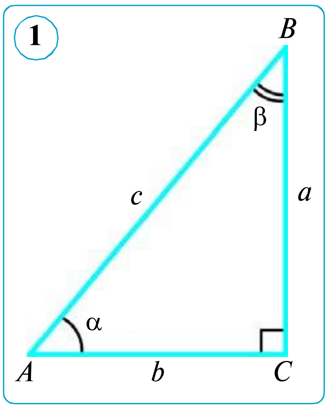
6. Упростите выражение:

1) $\cos^2\alpha + \cos^2(90° - \alpha)$; 2) $\sin^2\alpha - \cos^2(90° - \alpha)$.

7. Найдите используя таблицу: 1) $\sin 70°$; 2) $\cos 55°$; 3) $\operatorname{tg} 10°$; 4) $\operatorname{ctg} 18°$.

8. Найдите острый угол x, используя таблицу: $\sin x \approx 0{,}1392$.

25. РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



Главную задачу тригонометрии составляет *решение треугольников. Решение треугольника* – это значит по известным его элементам найти неизвестные элементы.

Прямоугольный треугольник можно решить по стороне и острому углу или двум сторонам. Рассмотрим примеры конкретных задач на решение прямоугольных треугольников, пользуясь обозначениями рис. 1. При этом договоримся округлять значения тригонометрических функций до тысячных, длины сторон – до сотых, а градусные меры углов – до единиц.

Рассмотрим четыре случая решения прямоугольного треугольника, зная два элемента.

Случай 1. Решение треугольника по гипотенузе и острому углу.

Задача 1. Найдите катеты a, b и острый угол β, если в прямоугольном треугольнике гипотенуза равна $c = 10$ cm, $\alpha = 50°$.

Решение. 1) Поскольку сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°, то $\beta = 90° - \alpha = 90° - 50° = 40°$.

Способ 1. 2) Катет, противолежащий углу α, равен произведению гипотенузы на $\sin\alpha$, т.е. $a = c\sin\alpha$.

Значит, $a = 10\sin 50° = 10 \cdot 0,7660 \approx 7,66$ (cm).

3) Катет, прилежащий к углу α, равен произведению гипотенузы на $\cos\alpha$, т.е. $b = c\cos\alpha$. Значит, $b = 10\cos 50° = 10 \cdot 0,6428 \approx 6,43$ (cm).

Способ 2. 2) Катет, прилежащий к углу β, равен произведению гипотенузы на $\cos\beta$, т.е. $a = c\cos\beta$.

Значит, $a = 10\cos 40° = 10 \cdot 0,7660 \approx 7,66$ (cm).

3) Катет, противолежащий углу β, равен произведению гипотенузы на $\sin\beta$, т.е. $b = c\sin\beta$. Значит, $b = 10\sin 40° = 10 \cdot 0,6428 \approx 6,43$ (cm).

Ответ: $a \approx 7,66$ cm, $b \approx 6,43$ cm, $\beta = 40°$.

Случай 2. Решение треугольника по катету и острому углу.

Задача 2. Найдите катет b, гипотенузу c и острый угол α, если в прямоугольном треугольнике катет $a = 6$ cm и острый угол $\beta = 22°$.

Решение. 1) Поскольку сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°, то $\alpha = 90° - \beta = 90° - 22° = 68°$.

Способ 1. 2) Гипотенуза равна отношению катета, прилежащему к углу β, на $\cos\beta$, т.е. $c = \frac{a}{\cos\beta}$.

Значит, $c = \frac{a}{\cos\beta} = \frac{6}{\cos 22°} = \frac{6}{0,9272} \approx 6,47$ (cm).

3) По определению: $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$. Откуда $b = a\operatorname{tg}\beta$, т.е.

$$b = 6\operatorname{tg}22^\circ = 6 \cdot 0{,}4040 \approx 2{,}42 \text{ (cm)}.$$

Способ 2. 2) Гипотенуза равна отношению катета, противолежащему углу α на $\sin\alpha$, т.е. $c = \frac{a}{\sin\alpha}$.

Значит, $c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{6}{\sin 68^\circ} = \frac{6}{0{,}9272} \approx 6{,}47$ (cm).

3) По определению: $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$. Откуда $b = a\operatorname{tg}\beta$, т.е.

$$b = 6\operatorname{tg}22^\circ = 6 \cdot 0{,}4040 \approx 2{,}42 \text{ (cm)}.$$

Ответ: $c \approx 6{,}47$ cm, $b \approx 2{,}42$ cm, $\alpha = 68^\circ$.

Вопросы, задачи и задания

1. В прямоугольном треугольнике катет длиной 7 cm является прилежащим к углу 60°. Найдите гипотенузу этого треугольника.

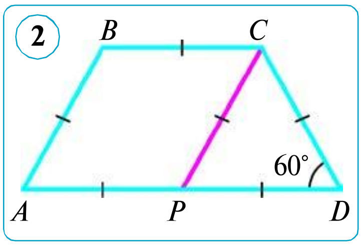
2. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 12 cm, а один из катетов равен $6\sqrt{2}$ cm. Найдите острые углы этого треугольника.

3. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна $c = 10$ cm, а острый угол равен $\alpha = 42^\circ$. Найдите катеты a, b и острый угол β. Решите задачу двумя способами (см. задачу 1, стр. 58).

4. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен $b = 4$ cm, а острый угол равен $\beta = 18^\circ$. Найдите катет a, гипотенузу c и острый угол α. Решите задачу двумя способами (см. задачу 2, стр. 59).

5. Упростите выражение: $\frac{\cos^2\alpha}{(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)} - \sin\alpha\cos(90^\circ - \alpha)$.

6. В равнобедренной трапеции угол при основании равен 60°, а боковая сторона равна меньшему основанию и равна $2\sqrt{2}$ cm. Найдите длину большего основания трапеции. Заполните пропуски.



Решение. Трапеция $ABCD$ – равнобедренная, $\angle A = \angle D = 60^\circ$, $AB = DC = BC = 2\sqrt{2}$ cm. Проведем $CP \parallel BA$ (рис. 2).

Тогда $\angle A = \angle CPD = 60^\circ$ (как ... углы при пересечении параллельных прямых CP и BA и секущей AD). Углы треугольника CPD равны, т.е. ...°, значит, он ... .

Поэтому, $CP = PD = ... = 2\sqrt{2}$ cm. Тогда $AD = 2 \cdot 2\sqrt{2} = ...$ (cm).

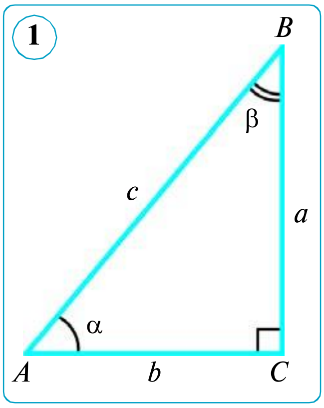
Ответ: $4\sqrt{2}$ cm.

7. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна $c = 8$ cm, а острый угол равен $\alpha = 30^\circ$. Найдите катеты a, b и острый угол β. Решите задачу двумя способами (см. задачу 1, стр. 58).

26. РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Случай 3. Решение треугольника по гипотенузе и катету.

Задача 1. В прямоугольном треугольнике гипотенуза c равна 13 cm, а катет a равен 5 cm. Найдите катет b, острые углы α и β.



Решение. 1) По теореме Пифагора:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ (cm)}.$$

Способ 1. 2) По определению синуса острого угла α:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{5}{13} \approx 0,3846.$$

Откуда $\alpha \approx 23°$.

3) Сумма острых углов в прямоугольном треугольнике равна 90°. Тогда

$$\beta = 90° - \alpha \approx 90° - 23° = 67°.$$

Ответ: $b = 12$ cm, $\alpha \approx 23°$, $\beta \approx 67°$.

Способ 2. 2) По определению синуса острого угла β:

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{12}{13} \approx 0,9231.$$

Откуда $\beta \approx 67°$.

3) Сумма острых углов в прямоугольном треугольнике равна 90°. Тогда

$$\alpha = 90° - \beta \approx 90° - 67° = 23°.$$

Ответ: $b = 12$ cm, $\alpha \approx 23°$, $\beta \approx 67°$.

Случай 4. Решение треугольника по двум катетам.

Задача 2. В прямоугольном треугольнике катеты a и b равны соответственно 8 cm и 15 cm. Найдите гипотенузу c, острые углы α и β.

Решение. 1) По теореме Пифагора:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17 \text{ (cm)}.$$

Способ 1. 2) По определению тангенса острого угла α:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{8}{15} \approx 0,5333.$$

Откуда $\alpha \approx 28°$.

3) Сумма острых углов в прямоугольном треугольнике равна 90°. Тогда

$$\beta = 90° - \alpha \approx 90° - 28° = 62°.$$

Ответ: $c = 17$ cm, $\alpha \approx 28°$, $\beta \approx 62°$.

Способ 2. 2) По определению тангенса острого угла β:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a} = \frac{15}{8} = 1,875.$$

Откуда $\beta \approx 62^\circ$.

3) Сумма острых углов в прямоугольном треугольнике равна 90°. Тогда

$$\alpha = 90^\circ - \beta \approx 90^\circ - 62^\circ = 28^\circ.$$

Ответ: $c = 17$ cm, $\alpha \approx 28^\circ$, $\beta \approx 62^\circ$.

Способ 3. 1) По определению котангенса острого угла α:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{15}{8} = 1,875.$$

Откуда $\alpha \approx 28^\circ$.

2) Сумма острых углов в прямоугольном треугольнике равна 90°. Тогда

$$\beta = 90^\circ - \alpha \approx 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ.$$

3) По теореме Пифагора:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17 \text{ (cm)}.$$

Ответ: $c = 17$ cm, $\alpha \approx 28^\circ$, $\beta \approx 62^\circ$.

Вопросы, задачи и задания

1. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, гипотенуза c равна $9\sqrt{2}$ cm, а катет a равен 9 cm. Найдите катет b, острые углы α и β. Решите задачу двумя способами.

2. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, катеты a и b соответственно равны $6\sqrt{3}$ cm и 6 cm. Найдите гипотенузу c, острые углы α и β этого треугольника. Решите задачу двумя способами.

3. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, катеты a и b соответственно равны $\sqrt{11}$ cm и 5 cm. Найдите гипотенузу c, острые углы α и β этого треугольника. Решите задачу двумя способами.

4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) отрезок CD – перпендикуляр, проведенный к гипотенузе. Докажите:

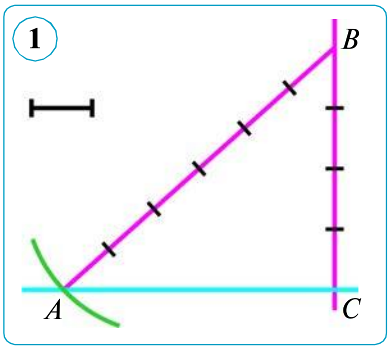
1) $\frac{CD}{\sin A} = AB \cos A$; 2) $AD \operatorname{tg} A = BD \operatorname{tg} B$.

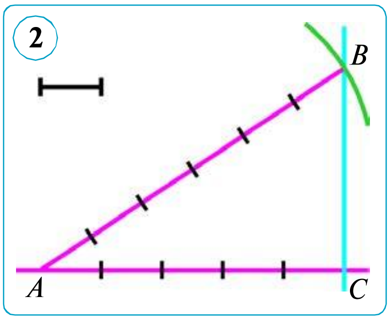
5. Вычислите: $2\sin 60^\circ + 4\cos 60^\circ - \operatorname{ctg} 30^\circ - 2\operatorname{tg} 45^\circ$.

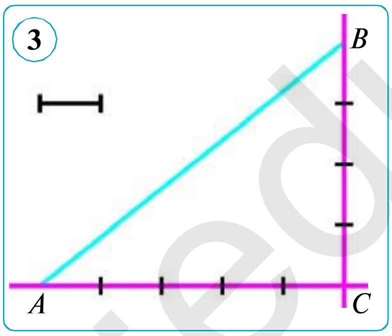
6. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, гипотенуза c равна 25 cm, катет b равен 24 cm. Найдите катет a, острые углы α и β. Решите задачу двумя способами.

7. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, катеты a и b соответственно равны 10 cm и 24 cm. Найдите гипотенузу c, острые углы α и β этого треугольника. Решите задачу двумя способами.

27. ПОСТРОЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ







Задача 1. Построить угол, синус которого равен $\frac{4}{5}$.

Построим прямой угол C и на одной стороне отложим от вершины отрезок CB, равный четырем произвольным масштабным единицам (рис. 1). Из точки B как из центра радиусом, равным 5 тем же масштабным единицам, опишем дугу, пересекающую другую сторону прямого угла. Точку пересечения обозначим буквой A. Соединив точки A и B, получим прямоугольный треугольник ABC. Угол — A искомый, так как синус равен $\frac{4}{5}$, т.е. $\sin A = \frac{4}{5}$.

Задача 2. Построить угол, косинус которого равен $\frac{5}{6}$.

Построим прямой угол C и на одной стороне отложим от вершины отрезок AC, равный 5 произвольным масштабным единицам (рис. 2). Из точки A как из центра радиусом, равным 6 тем же масштабным единицам, опишем дугу, пересекающую другую сторону прямого угла. Точку пересечения обозначим буквой B. Соединив точки A и B, получим прямоугольный треугольник ABC. Угол A — искомый, так как косинус равен $\frac{5}{6}$, т.е. $\cos A = \frac{5}{6}$.

Задача 3. Построить угол, тангенс которого равен $\frac{4}{5}$.

Построим прямой угол C и на одной его стороне отложим от вершины отрезок CA, равный 5 произвольным масштабным единицам, а на другой отрезок CB, равный 4 тем же масштабным единицам (рис. 3). Соединив точки A и B, получим прямоугольный треугольник ABC. Угол A будет искомым, так как его тангенс равен $\frac{4}{5}$, т.е. $\mathrm{tg} A = \frac{4}{5}$.

Каждый из катетов прямоугольного треугольника всегда меньше гипотенузы, то синус и косинус любого острого угла всегда меньше 1.

Что касается сравнительной величины катетов, то каждый из них может быть взаимно равным, и больше или меньше другого. Поэтому тангенс и котангенс острого угла могут быть выражены любым положительным числом. Каждый из них может быть меньше единицы, больше единицы и равен единице. Если значение тригонометрических функций будет десятичной дробью, то для построения прямоугольного треугольника, его необходимо записать в виде несократимой дроби, и после этого надо выбрать соответствующую масштабную единицу, а затем надо построить прямоугольный треугольник как в решенных задачах.

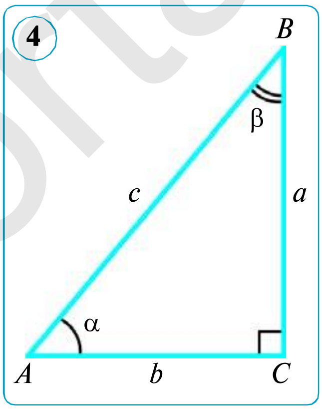
Вопросы, задачи и задания

1. Постройте прямоугольный треугольник ABC $(\angle C = 90°)$, если: 1) $\text{tg}A = \frac{3}{5}$; 2) $\sin A = \frac{2}{3}$.

2. Постройте прямоугольный треугольник ABC $(\angle C = 90°)$, если: 1) $\sin A = \frac{5}{8}$; 2) $\cos A = \frac{3}{4}$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC угол C равен $90°$, $c = 7\sqrt{2}$ cm – гипотенуза, $b = 7$ cm – катет. Найдите катет a, острые углы α и β этого треугольника (рис. 4).

4. В прямоугольном треугольнике ABC угол C равен $90°$, $c = 12$ cm – гипотенуза, $\alpha = 60°$. Найдите катеты a, b, острый угол β треугольника (рис. 4). Решите задачу двумя способами.

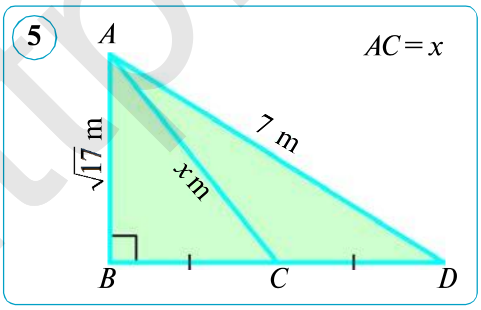


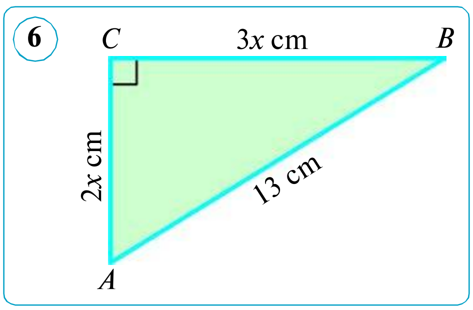
5. Найдите неизвестные длины (рис. 5, 6).

6. В прямоугольном треугольнике ABC угол C равен $90°$, $c = 74$ cm – гипотенуза, $\sin\alpha = \frac{12}{37}$. Найдите периметр этого треугольника (рис. 4).

7. Постройте прямоугольный треугольник ABC $(\angle C = 90°)$, если:

1) $\sin A = \frac{4}{7}$; 2) $\cos A = \frac{3}{5}$; 3) $\text{tg}A = \frac{2}{5}$.





28. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ

1. Практические задачи на применение теоремы Пифагора.

Задача 1. Цветок водяной лилии выступает над поверхностью озера на 10 cm. Если цветок потянуть в сторону, то он коснется поверхности воды на расстоянии 1 m от начального положения. Найдите глубину озера в данном месте.

Решение. Обозначим глубину озера CD в данном месте через x (рис. 1). Тогда $BD = AD = AC + CD = 0{,}1 + CD = 0{,}1 + x$ (m). Из прямоугольного треугольника BCD, по теореме Пифагора имеем:

$$BD^2 - CD^2 = BC^2, \quad (0{,}1 + x)^2 - x^2 = 1,$$

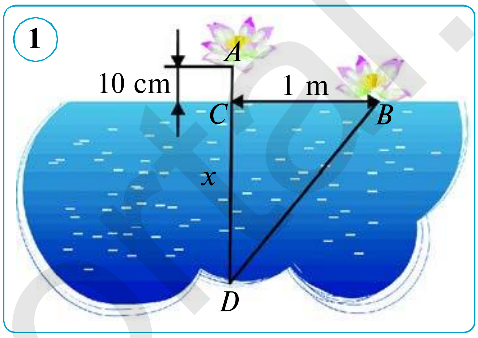
откуда:

$$0{,}01 + 0{,}2x + x^2 - x^2 = 1;$$

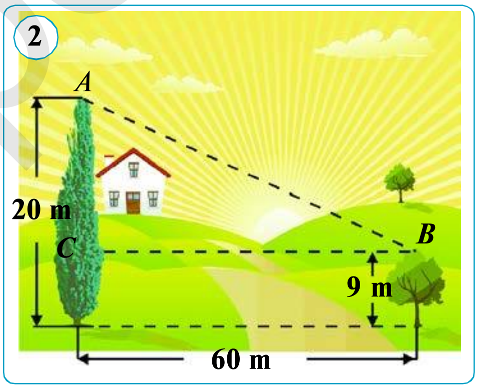
$$0{,}2x = 0{,}99; \quad x = 0{,}99 : 0{,}2;$$

$$x = 9{,}9 : 2; \quad x = 4{,}95 \text{ (m)}.$$

Ответ: глубина озера 4,95 m.



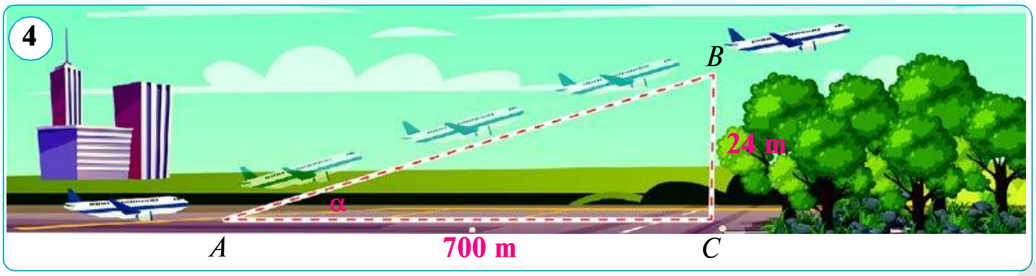
Задача 2. Высота одного дерева 20 m, а второго 9 m. Расстояние между деревьями составляет 60 m. Найдите расстояние между верхушками этих деревьев (рис. 2). Решите самостоятельно.



Задача 3. Высоты двух сосен соответственно равны 21 m и 28 m, а расстояние между ними составляет 24 m. Найдите расстояние между верхушками этих деревьев (см. рис. 2). Решите самостоятельно.

2. Практические задачи на применение синуса острого угла.

Крутизну подъема на ровной наклонной дороге можно задать не углом наклона, а высотой подъема, приходящегося на длину пройденного пути (рис. 3). Например, подъем 2 м на 100 пути. В этом случае крутизна подъема задается отношением высоты к пройденному пути. В рассмотренном примере она равна 0,02,



т.е.: $\dfrac{2\ \text{m}}{100\ \text{m}} = 0,02$. Разумеется, можно было бы говорить и о спуске, например, по той же дороге. Это отношение 0,02 не зависит от пройденного пути.

Задача 4. Угол подъема ровной наклонной дороги составляет в среднем 15° (см. рис. 3). На какую высоту поднимается легковая машина, пройдя по дороге 300 m?

Указание. Найдите крутизну подъема, применяя определение синуса острого угла.

2. Практические задачи на применение тангенса острого угла.

Задача 5. На расстоянии 700 m от точки отрыва самолета от земли расположены деревья высотой 24 m. Под каким углом должен подниматься самолет, чтобы не задеть деревья?

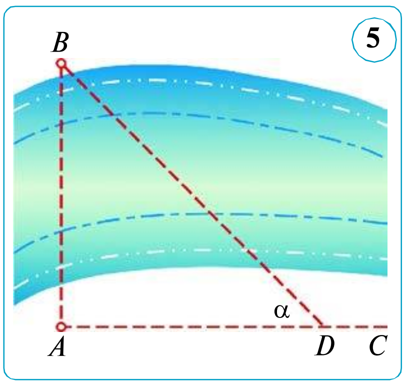
Решение. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $AC = 700$ m, $BC = 24$ m (рис. 4). По определению тангенса острого угла находим:

$$\text{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{24}{700} \approx 0,0343 \Rightarrow \alpha \approx 2°.$$

Ответ: чтобы не задеть деревья от точки отрыва земли самолет должен подниматься под углом не меньше 2°.

Задача 6. Определить расстояние между пунктами A и B, разделенными препятствием. Пусть требуется найти расстояние от пункта A до пункта B, находящегося за рекой (рис. 5).

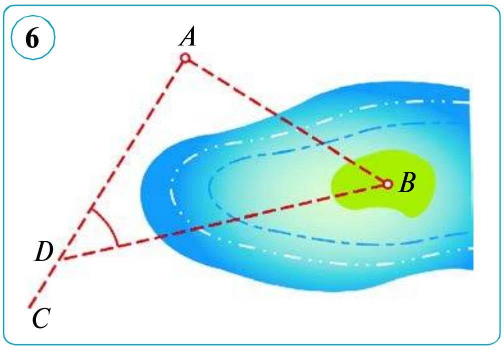
Решение. Строим при помощи астролябии или эккера при точке A прямой угол BAC. Взяв на прямой AC произвольную точку D, с помощью астролябии измеряем угол ADB; пусть он равен 44°. Измеряем расстояние AD, пусть оно составит 120 m. Пользуясь определением тангенса острого угла, находим расстояние AB:

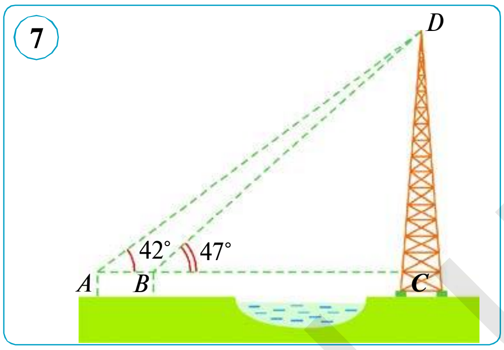


$$\frac{AB}{120} = \text{tg}44° \Rightarrow AB = 120 \cdot \text{tg}44° \approx$$

$$\approx 120 \cdot 0,9657 \approx 116\ (\text{m}).$$

Ответ: ≈ 116 m.





Задача 7. Определить расстояние от пункта A до пункта B, между которыми находится водное пространство (рис. 6).

Указание. Рассуждение аналогично задаче 6.

Считая, что $\angle ADB = 48°$ и $AD = 200$ m, решите задачу.

Задача 8. Определить высоту предмета, к основанию которого подойти нельзя, например, требуется вычислить высоту электропередатчика (рис. 7).

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ACD. В этом треугольнике мы можем с помощью астролябии измерить угол A. Положим, он равен 42°.

В треугольнике BCD измеряем угол DBC, пусть он равен 47°.

По определению тангенса в прямоугольном треугольнике ACD имеем:

$$\frac{CD}{AC} = \operatorname{tg}42° \Rightarrow AC = \frac{CD}{\operatorname{tg}42°}. \qquad (1)$$

По определению тангенса в прямоугольном треугольнике BCD имеем:

$$\frac{CD}{BC} = \operatorname{tg}47° \Rightarrow BC = \frac{CD}{\operatorname{tg}47°}. \qquad (2)$$

Точки A, B и C находятся на одной прямой.

Находим разность $AC - BC$, т.е. из равенства (1) вычитаем (2):

$$AC - BC = \frac{CD}{\operatorname{tg}42°} - \frac{CD}{\operatorname{tg}47°} \Rightarrow AC - BC = CD\left(\frac{1}{\operatorname{tg}42°} - \frac{1}{\operatorname{tg}47°}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC - BC = CD\left(\frac{1}{0{,}9004} - \frac{1}{1{,}0724}\right) \Rightarrow AC - BC = CD(1{,}1106 - 0{,}9325) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC - BC = CD \cdot 0{,}1781 \Rightarrow CD = \frac{AC - BC}{0{,}1781}.$$

Расстояние $AC - BC$, т.е. AB, может быть непосредственно измерено, пусть оно равно 12 m, тогда

$$CD = \frac{AC - BC}{0{,}1781} = \frac{AB}{0{,}1781} = \frac{12}{0{,}1781} \approx 67{,}4 \text{ (m)}.$$

Ответ: $\approx 67{,}4$ m.

Составьте и решите задачи в окружающей обстановке, найти высоту какого-нибудь предмета, к основанию которого подойти нельзя или определите расстояние до какой-нибудь недоступной точки.

29–30. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 2. РАБОТА НАД ОШИБКАМИ

1. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 20 cm, а синус одного из острых углов равен 0,5. Найдите катеты треугольника.

2. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 13 cm, а косинус одного из острых углов равен $\frac{5}{13}$. Найдите катеты треугольника.

3. Упростите выражение: $(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)^2 + 2\ \sin\alpha \cos\alpha$.

4. Найдите высоты треугольника со сторонами:

1) $a = c = 17$ cm, $b = 16$ cm; 2) $a = 30$ cm, $b = 34$ cm, $c = 16$ cm.

ТЕСТ 2 Проверьте себя!

1. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 12 cm, а гипотенуза на 6 cm больше второго катета. Найдите длину гипотенузы.

А) 15 cm; Б) 25 cm; В) 26 cm; Г) 18 cm.

2. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 12 cm, а второй меньше гипотенузы на 8 cm. Найдите гипотенузу треугольника.

А) 15 cm; Б) 16 cm; В) 13 cm; Г) 25 cm.

3. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 25 cm, катеты относятся как 3 : 4. Найдите меньший катет треугольника.

А) 10 cm; Б) 15 cm; В) 9 cm; Г) 20 cm.

4. Чему равна наименьшая высота треугольника со сторонами 13 cm, 14 cm и 15 cm?

А) 11,5 cm; Б) 11,1 cm; В) 11 cm; Г) 11,2 cm.

5. Диагонали ромба равны 14 cm и 48 cm. Найдите периметр ромба.

А) 60 cm; Б) 100 cm; В) 80 cm; Г) 120 cm.

6. Периметр ромба 68 cm, одна из диагоналей равна 30 cm. Найдите вторую диагональ ромба.

А) 12 cm; Б) 8 cm; В) 16 cm; Г) 20 cm.

7. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен $5\sqrt{3}$ cm, а противолежащий угол равен 60°. Найдите гипотенузу треугольника.

А) $5\sqrt{3}$ cm; Б) $2\sqrt{15}$ cm; В) 5 cm; Г) 10 cm.

8. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен $5\sqrt{3}$ cm, а прилежащий угол равен 30°. Найдите второй катет этого треугольника.

А) $5\sqrt{3}$ cm; Б) $2\sqrt{15}$ cm; В) 5 cm; Г) 10 cm.

9. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) гипотенуза равна 17 cm, а катеты равны 15 cm и 8 cm. Найдите синус угла A.

А) $\frac{8}{15}$; Б) $\frac{8}{17}$; В) $\frac{17}{15}$; Г) $\frac{15}{17}$.

10. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) гипотенуза равна 37 cm, а катеты равны 12 cm и 35 cm. Найдите косинус угла B.

А) $\frac{12}{37}$; Б) $\frac{35}{37}$; В) $\frac{12}{35}$; Г) $\frac{35}{12}$.

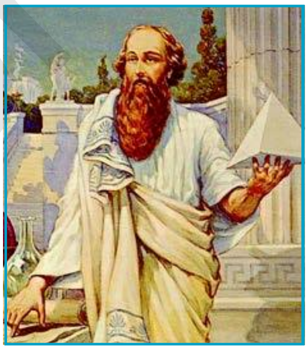
Изучаем английский язык!

Теорема Пифагора – Pythagorean theorem
Обратная теорема – inverse function theorem
Тригонометрия – trigonometry
Гипотенуза – hypotenuse

Синус – sine
Косинус – cosine
Тангенс – tangent
Котангенс – cotangent

Исторические сведения

Пифагор один из величайших ученых Древней Греции жил в VI в. до н.э (ок. 570–500 гг. до н.э.). Он родился на острове Самос в Эгейском море, в молодые годы много странствовал, долго жил в Египте, затем Вавилоне, может быть, побывал и в Индии.

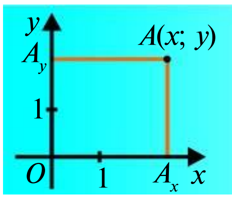


Пифагор
(570–500 гг. до н.э.)

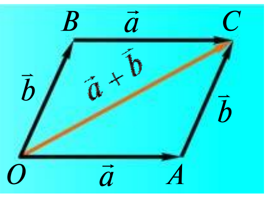
Последний период своей жизни (примерно с 530 г. до н.э.) Пифагор прожил в городе Кротоне – греческой колонии на юге Италии. Здесь он создал знаменитую пифагорейскую школу. Его исследования охватывали и арифметику («**Все есть число**» – девиз пифагорейцев), и, конечно, геометрию. Тогда математика только складывалась у греков в теоретическую науку, и Пифагор оказал на нее большое влияние. Однако не он открыл теорему, носящую его имя. Она была известна еще раньше в Древнем Египте и Вавилоне, задолго до Пифагора. Возможно, что тогда еще не знали ее доказательства, а само соотношение между гипотенузой и катетами было установлено опытным путем на основе измерений. Пифагор, по видимому, нашел доказательство этого утверждения, и факт, взятый из отдельных измерений, стал законом: ведь если утверждение доказано, то значит, «**оно не может быть иначе**». Теорема относилась тогда к площадям квадратов, а не к численным значениям длин.

Сохранилось древнее предание, что в честь своего открытия Пифагор принес в жертву богам быка, по другим свидетельствам – даже сто быков.

Теорема Пифагора – одна из самых красивых в геометрии. Имеется более 500 различных ее доказательств. Многие известные мыслители и писатели прошлого обращались к этой замечательной теореме и посвятили ей свои строки.



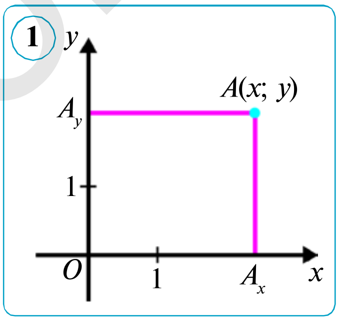
ГЛАВА III
МЕТОД КООРДИНАТ. ВЕКТОРЫ

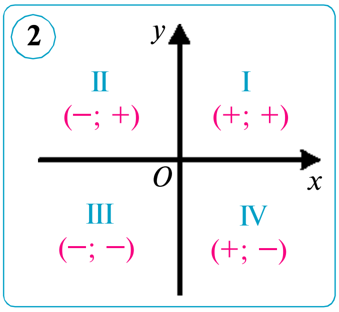


§ 7. СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

31. КООРДИНАТЫ ТОЧКИ НА ПЛОСКОСТИ. КООРДИНАТЫ СЕРЕДИНЫ ОТРЕЗКА

1. Координаты точки на плоскости. Проведем на плоскости через точку O две взаимно перпендикулярные прямые Ox и Oy. Эта точка принимается за начало отсчета каждой координатной прямой, выберем на каждой из них направление (его обозначают стрелкой) и единичный отрезок. За положительное направление на оси Ox, как правило, принимают направление слева направо, а на оси Oy – снизу вверх (рис. 1). Введенную таким способом систему координат называют **прямоугольной декартовой** в честь Рене Декарта, который первым применил ее в своих исследованиях.





Ось Ox называют **осью абсцисс** (или ось x), обычно она располагается горизонтально; а ось Oy – **осью ординат** (или ось y), обычно она располагается вертикально.

Плоскость, на которой выбрана система координат, называется **координатной плоскостью**. Пусть A – произвольная точка на координатной плоскости. Проведем через нее прямые, параллельные осям Ox и Oy. Они пересекают оси Ox и Oy, соответственно, в точках A_x и A_y (см. рис. 1.).

Пусть длина отрезка AA_x равна x, а длина отрезка AA_y равна y. Число x называется **абсциссой** точки A, а число y – **ординатой** точки A. Пару чисел x и y называют **координатами** точки A и записывают так: $\boldsymbol{A(x;\ y)}$. При этом абсциссу точки указывают первой, а ординату – второй.

Таким образом: 1) каждой точке A на плоскости соответствует пара чисел $(x\,;\ y)$, называемых ее координатами; 2) и, наоборот, если даны два числа $(x\,;\ y)$, то эти числа являются координатами точки A; 3) если $x \neq y$, то пары координат $(x\,;\ y)$ и $(y\,;\ x)$ определяют разные точки координатной плоскости.

Начало координат – точка O лежит и на оси абсцисс, и на оси ординат. Çí à÷èò, åå êî î ðäèí àòû $O(0;\ 0)$. Произвольная точка B на оси Ox имеет координаты $B(x;\ 0)$, произвольная точка C на оси Oy имеет координаты $C(0;\ y)$. Оси координат (Ox и Oy) делят плоскость на четыре части, их называют *координатными четвертями* или *координатными углами*. Координатные четверти нумеруют римскими цифрами, против направления часовой стрелки. В пределах одной координатной четверти знаки координат точек сохраняются такими, как указано на рис. 2.

Рассмотрим основные случаи применения координат для изучения геометрических фигур и их свойств.

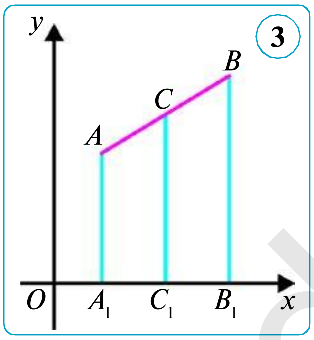
2. Координаты середины отрезка.

Теорема.

Координаты середины отрезка вычисляются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

где $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ – концы отрезков, $C(x;\ y)$ – середина отрезка.



Доказательство. Найдем координаты x и y точки C. Пусть отрезок AB не пересекает ось Ox, т.е. рассмотрим случай, когда $x_1 < x_2$ (рис. 3). Проведем перпендикуляры AA_1, BB_1 и CC_1 к оси Ox. Очевидно, что $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ и основания перпендикуляров имеют координаты $A_1(x_1;\ 0)$, $B_1(x_2;\ 0)$ и $C_1(x;\ 0)$. Поскольку точка C – середина отрезка AB, то по теореме Фалеса точка C_1 – середина отрезка A_1B_1. Это означает, что $A_1C_1 = C_1B_1$, т.е. $x_2 - x = x - x_1$, откуда $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Если $x_1 = x_2$, т.е. отрезок AB параллелен оси Oy, то все точки A_1, B_1 и C_1 совпадают, т.е. $x_1 = x = x_2$, значит, формула снова выполняется.

Тот же результат получим и в случае $x_1 > x_2$ (проверьте это самостоятельно).

Ордината точки C находится аналогично. Через точки A, B и C проводятся прямые, перпендикулярные оси Oy. Получается формула:

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Задача. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(-2;\ 1)$, $B(0;\ 4)$, $C(4;\ 1)$ и $D(2;\ -2)$ является параллелограммом.

Решение. Как известно, по признаку параллелограмма четырехугольник, диагонали которого точкой пересечения делятся пополам, является параллелограммом. Найдем координаты середины диагоналей AC и BD данного четырехугольника $ABCD$. Середина отрезка AC имеет координаты:

$$x = \frac{-2+4}{2} = 1, \quad y = \frac{1+1}{2} = 1.$$

Середина отрезка BD имеет координаты:

$$x = \frac{0+2}{2} = 1, \quad y = \frac{4+(-2)}{2} = 1.$$

Итак, отрезки AC и BD имеют общую середину (1; 1), т.е. четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм по признаку 3.

Вопросы, задачи и задания

1. 1) Как называются оси координат и точка их пересечения?
2) Какая плоскость называется координатной плоскостью? Что такое координаты точки на координатной плоскости?

2. Из точки $A(4; -5)$ проведены перпендикуляры к осям координат. Напишите координаты оснований этих перпендикуляров.

3. Определите, в какой координатной четверти лежит точка $A(x; y)$, если:
1) $x = -4$, $y = -6$; 2) $x = -3$, $y = 5$; 3) $x > 0$, $y < 0$; 4) $x > 0$, $y > 0$.

4. Найдите координаты середины отрезка AB, если: 1) $A(-12; -3)$, $B(-8; 1)$; 2) $A(4; -11)$, $B(-4; 0)$; 3) $A(-2; 9)$, $B(-2; -7)$.

5. Точка C – середина отрезка AB. Найдите координаты: 1) точки B, если $A(2; -3)$, $C(0{,}5; 1)$; 2) точки A, если $C(0; -1)$, $B(3; -3)$.

6. Даны точки $A(-4; 0)$, $B(-2; -2)$, $C(0; -6)$ и $D(-2; -4)$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм.

7. Найдите координаты четвертой вершины параллелограмма $ABCD$, если: 1) $A(2; 6)$, $B(4; 7)$, $C(8; 10)$; 2) $B(-1; 4)$, $C(3; 5)$, $D(1; 3)$.

8. Точка C – середина отрезка AB, а точка D – середина отрезка BC. Найдите координаты точки D, если:
1) $A(-3; 3)$, $B(5; -1)$; 2) $A(-2; -1)$, $C(2; 3)$.

Знать это полезно!

Географическая широта и долгота на поверхности Земли называются ***географическими координатами*** этой точки. На каждую точку поверхности Земли сопоставляется два параметра – его географическая долгота и широта, и точно так же наоборот по двум параметрам географической долготы и широты определяется конкретная точка на поверхности Земли. Здесь параллели и меридианы выполняют роль осей абсцисс и ординат в прямоугольной системе координат.

Например, г. Ташкент находится на 069,20 восточной долготе ≈ 69° и 041,26 северной широте ≈ 41°, а г. Самарканд на 066,93 восточной долготе ≈ 67° и 039,65 северной широте ≈ 40°.

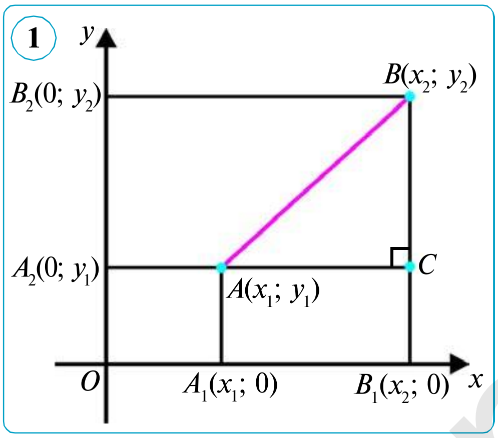
32–33. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ. УРАВНЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

1. Расстояние между двумя точками.

Теорема.

Расстояние между двумя точками $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ вычисляется по формуле:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$



Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$. Проведем через данные точки A и B прямые, перпендикулярные осям координат, и обозначим точку их пересечения C (рис. 1). Расстояние между точками A и C равно $|x_2 - x_1|$, а расстояние между точками B и C $|y_2 - y_1|$. Итак, из прямоугольного треугольника ABC по теореме Пифагора имеем:

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2, \quad \text{или} \quad AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,. \qquad (1)$$

Хотя формула (1) для расстояния между точками выведена нами в предположении $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$, она остается верной и в других случаях. Действительно, если $x_1 = x_2$ и $y_1 \neq y_2$, то $AB = |y_2 - y_1|$. Тот же результат дает и только что доказанная формула (1). Аналогично рассматривается случай, когда $x_1 \neq x_2$ и $y_1 = y_2$. При $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$ точки A и B совпадают и формула (1) дает $AB = 0$.

Задача 1. Вершины четырехугольника $ABCD$ имеют координаты $A(-2;\ 1)$, $B(0;\ 4)$, $C(4;\ 1)$ и $D(2;\ -2)$. Докажите, что $ABCD$ – параллелограмм.

Решение. Как известно, по 2-ому признаку параллелограмма, четырехугольник, противолежащие стороны которого равны, является параллелограммом. Найдем длины сторон четырехугольника $ABCD$:

$$AB = \sqrt{(0-(-2))^2 + (4-1)^2} = \sqrt{13}\,; \quad BC = \sqrt{(4-0)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{25} = 5\,;$$

$$CD = \sqrt{(2-4)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{13}\,; \quad AD = \sqrt{(2-(-2))^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{25} = 5\,.$$

Итак, $AB = CD$ и $BC = AD$, т.е. четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм по признаку.

2. Уравнение фигуры на плоскости. *Уравнением фигуры* в декартовых координатах на плоскости называется уравнение с двумя неизвестными x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки фигуры. И обратно, любые два числа, удовлетворяющие этому уравнению, являются координатами некоторой точки фигуры.

3. Уравнение окружности.

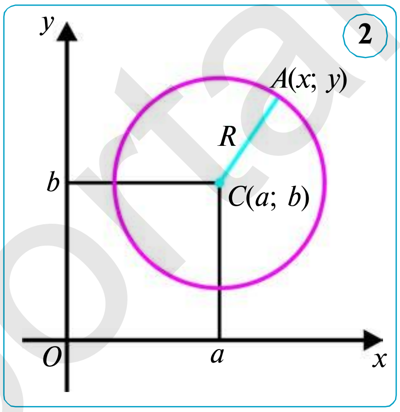
Теорема.

В прямоугольной системе координат уравнение окружности радиуса R с центром в точке $C(a;\ b)$ имеет вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

Доказательство. Пусть в прямоугольной системе координат задана окружность радиуса R ($R>0$) с центром в точке $C(a;\ b)$ (рис. 2). Выберем произвольную точку окружности $A(x;\ y)$. По определению окружности расстояние от центра до произвольной точки окружности равно радиусу R, т.е. $CA=R$, и следовательно, $CA^2=R^2$. Записав это равенство в координатах, получим:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (2)$$



Поскольку A — произвольная точка окружности, то этому уравнению (2) удовлетворяют координаты любой точки окружности.

Обратно, любая точка A, координаты которой удовлетворяют уравнению (2), принадлежит окружности, так как расстояние от нее до точки C равно R. Отсюда следует, что уравнение (2) действительно является уравнением окружности с центром в точке C и радиусом R.

Теорема доказана.

Следствие. Окружность радиуса R с центром в начале координат задается уравнением вида:

$$x^2+y^2=R^2.$$

Задача 2. Определите центр и радиус окружности, заданной уравнением $x^2-4x+y^2+2y-11=0$.

Решение. Приведем данное уравнение к виду $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Заметим, что x^2-4x можно записать в виде $(x-2)^2-4$, а y^2+2y в виде $(y+1)^2-1$. Подставим эти выражения в данное уравнение, получим:

$$(x-2)^2-4+(y+1)^2-1-11=0, \text{ или } (x-2)^2+(y+1)^2=4^2.$$

Это уравнение задает окружность с центром в точке $C(2;\ -1)$ и радиусом 4.

Ответ: $(2;\ -1)$, $R=4$.

Вопросы, задачи и задания

1. 1) Как выражается расстояние между точками через их координаты?
2) Что такое уравнение фигуры в декартовых координатах?
3) Каким уравнением задается окружность на координатной плоскости?

2. Найдите длину отрезка AB, если:
1) $A(-3; 8)$, $B(5; 2)$; 2) $A(8; -1)$, $B(-7; 7)$; 3) $A(5; 0)$, $B(0; -12)$.

3. Найдите x, если: 1) расстояние между точками $A(2; 1)$ и $B(x; -2)$ равно 5; 2) расстояние между точками $A(x; 0)$ и $B(2; -1)$ равно 1.

4. Найдите периметр треугольника ABC, если $A(-1; 2)$, $B(2; 6)$, $C(5; 2)$.

5. Составьте уравнение окружности с центром в точке C и радиусом R, если: 1) $C(7; 11)$, $R = 5$; 2) $C(-2; 3)$, $R = 1$.

6. Определите центр и радиус окружности, заданной уравнением:
1) $(x-2)^2+(y-5)^2=7^2$; 2) $(x+1)^2+(y-5)^2=4$.

7. Определите центр и радиус окружности, заданной уравнением:
1) $x^2-6x+y^2+2y-6=0$; 2) $x^2+y^2+10y+24=0$.

8. 1) Определите вид треугольника ABC, если его вершины имеют координаты $A(0; 0)$, $B(0; 2)$ и $C(2; 0)$.
2) Докажите, что треугольник с вершинами $A(1; 0)$, $B(2; \sqrt{3})$ и $C(8; 0)$ равносторонний.

9. Составьте уравнение окружности с центром в точке C и радиусом R, если: 1) $C(9; 4)$, $R = 7$; 2) $C(-3; -4)$, $R = 2$.

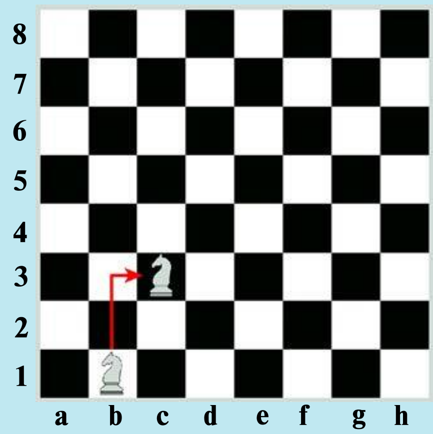
10. Определите центр и радиус окружности, заданной уравнением:
1) $(x-7)^2+(y+2)^2=25$; 2) $(x-4)^2+y^2=1$.

11. На окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 169$, найдите точки:
1) с абсциссой 5; 2) с ординатой -12.

Знать это полезно!

Шахматы (по персидски *шохмот* – король (шах) проиграл) вид спорта. Цель игры: поразить короля соперника. Играется на доске, состоящей из двух цветов (белый и черный) и с фигурами двух цветов (белый и черный): по 1-ому королю и ферзю, по два (2) слона, коня и ладьи, 8 пешек. С помощью записей шахматиста вы можете прочитать все ходы, которые были сделаны в процессе игры.

Например, запись конь b1-c3 означает переход коня из ячейки b1 в ячейку c3. Все это система координат на шахматной доске.



b1-c3

34. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ. МЕТОД КООРДИНАТ ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1. Уравнение прямой.

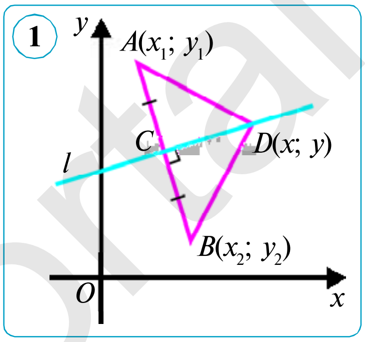
Теорема.

В прямоугольной системе координат уравнение прямой имеет вид:

$$\boldsymbol{ax + by + c = 0,} \qquad \textbf{(1)}$$

где *a*, *b*, *c* — некоторые числа, причем хотя бы одно из чисел *a* и *b* не равно нулю.

Доказательство. Пусть l — произвольная прямая в прямоугольной системе координат. Проведем какую-нибудь прямую, перпендикулярную прямой l, и отложим на ней от точки пересечения C с прямой l равные отрезки CA и CB (рис. 1). Пусть x_1, y_1 — координаты точки A и x_2, y_2 — координаты точки B. Произвольная точка $D(x; y)$, лежащая на прямой l равноудалена от точек A и B, т.е. $DA = DB$, откуда $DA^2 = DB^2$. Записав эти равенства в координатах, имеем:



$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 . \qquad (2)$$

Если в этом уравнении раскрыть скобки и перенести все члены уравнения (2) в левую его часть, то оно примет вид:

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + (x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 + y_2^2) = 0. \qquad (3)$$

Поскольку x_1, y_1, x_2, y_2 — некоторые числа, то, обозначив $2(x_2 - x_1) = a$, $2(y_2 - y_1) = b$ и $x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 + y_2^2 = c$, и подставляя их в уравнение (3), получим уравнение:

$$ax + by + c = 0,$$

где a, b и c — некоторые числа.

Поскольку D — произвольная точка прямой l, то этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки данной прямой.

Пусть теперь числа x_0 и y_0 — координаты некоторой точки D_0 — удовлетворяют уравнение (1). В этом случае $D_0A = D_0B$, т.е. точка D_0 равноудалена от точки A и B, следовательно, принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку AB — прямой l.

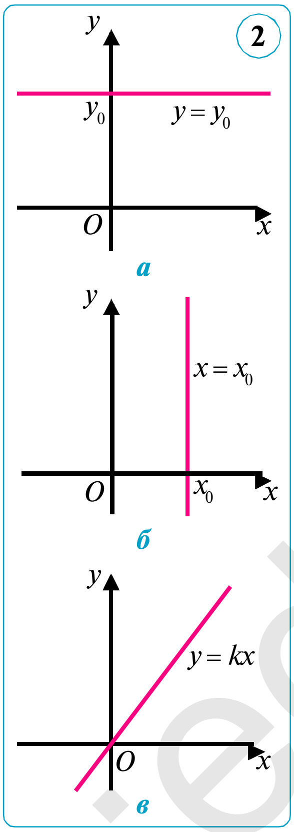
Поскольку A и B — две разные точки, то хотя бы одна из разностей $(x_2 - x_1)$ или $(y_2 - y_1)$ не равна нулю, т.е. хотя бы одно из чисел a и b обязательно не равно нулю.

Задача 1. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точки $A(1; -1)$ и $B(-3; 2)$.

Решение. Как мы знаем, прямая AB имеет уравнение вида $ax+by+c=0$. Точки A и B лежат на прямой AB, а значит, их координаты удовлетворяют этому уравнению. Подставляя координаты точек A и B в уравнение прямой, получим:

$$a\cdot 1+b\cdot(-1)+c=0,\quad a\cdot(-3)+b\cdot 2+c=0,\text{ или}$$
$$a-b+c=0,\quad -3a+2b+c=0.$$

Из этих уравнений можно выразить два коэффициента, например, a и b, через третий c: $a=3c$, $b=4c$. Подставляя эти значения a и b в уравнение прямой, получим: $3cx+4cy+c=0$, где $c\neq 0$.



Это уравнение можно сократить на c (так как $c\neq 0$). Тогда получим: $3x+4y+1=0$.

Это и есть уравнение нашей прямой AB.

2. Расположение прямой в прямоугольной системе координат. Рассмотрим три частных случая расположения прямой $ax+by+c=0$ в прямоугольной системе координат. Выясним, для каждого случая, как расположена прямая относительно осей координат.

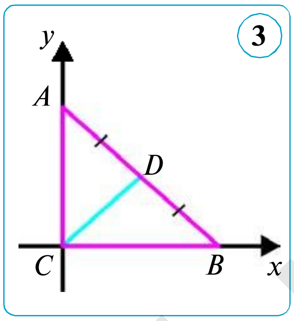
Случай 1. $a=0$, $b\neq 0$. В этом случае уравнение прямой приобретает вид $by+c=0$, или $y=y_0$, где $y_0=-\frac{c}{b}$ — некоторое число. Прямая $y=y_0$ параллельна оси абсцисс, так как все точки прямой имеют одну и ту же ординату (рис. 2, *а*). Если $c=0$, то прямая совпадает с ней. Уравнение оси абсцисс имеет вид $y=0$.

Случай 2. $a\neq 0$, $b=0$. В этом случае уравнение прямой приобретает вид $ax+c=0$, или $x=x_0$, где $x_0=-\frac{c}{a}$ — некоторое число. Прямая $x=x_0$ параллельна оси ординат, так как все точки прямой имеют одну и ту же абсциссу (рис. 2, *б*). Если $c=0$, то прямая совпадает с ней. Уравнение оси ординат имеет вид $x=0$.

Случай 3. $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c=0$. В этом случае уравнение прямой приобретает вид $ax+by=0$, или $y=kx$, где $k=-\frac{a}{b}$ — некоторое число. Прямая $y=kx$ проходит через начало координат (рис. 2, *в*).

3. Метод координат при решении геометрических задач. Формулы нахождения координат середины отрезка и расстояния между точками можно использовать для решения геометрических задач. С этой целью следует ввести прямоугольную систему координат и записать условие задачи в координатах. После этого решение проводится с помощью алгебраических вычислений.

Задача 2. Докажите, что середина гипотенузы прямоугольного треугольника равноудалена от всех его вершин.



Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$). Обозначим буквой D середину гипотенузы AB. Введем прямоугольную систему координат так, как показано на рис. 3. Если $BC = a$, $AC = b$, то вершины треугольника имеют координаты $C(0;\ 0)$, $B(a;\ 0)$, $A(0;\ b)$. По формулам координат середины отрезка находим координаты точки D: $D(0,5a;\ 0,5b)$.

Пользуясь формулой расстояния между точками, найдем длины отрезков DC и DA:

$$DC = \sqrt{(0,5a)^2 + (0,5b)^2} = \sqrt{0,25(a^2 + b^2)} = 0,5\sqrt{a^2 + b^2};$$

$$DA = \sqrt{(0,5a)^2 + (0,5b - b)^2} = \sqrt{0,25a^2 + 0,25b^2} = \sqrt{0,25\left(a^2 + b^2\right)} = 0,5\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Таким образом, $DA = DB = DC$, что и требовалось доказать.

Вопросы, задачи и задания

1. 1) Докажите, что прямая в прямоугольной системе координат имеет уравнение вида $ax + by + c = 0$.

? 2) Как расположена прямая $ax + by + c = 0$, если в ее уравнении коэффициент $a = 0$ ($b = 0$; $c = 0$)?

2. Определите, какие из точек $A(3;\ –1)$, $B(–3;\ 0)$, $C(12;\ 5)$, $D(3;\ 0)$ и $E(–9;\ –2)$ лежат на прямой, а какие не лежат на прямой $x – 3y + 3 = 0$?

3. Составьте уравнение прямой AB, которая проходит через точки:

1) $A(1;\ 7)$ и $B(–3;\ –1)$; 2) $A(2;\ 5)$ и $B(5;\ 2)$; 3) $A(0;\ 1)$ и $B(–4;\ –5)$.

4. Чему равен коэффициент c в уравнении $x + y + c = 0$, если прямая проходит через точку $(1;\ 2)$?

5. Чему равны коэффициенты a и b в уравнении прямой $ax + by – 1 = 0$, если известно, что она проходит через точки $(1;\ 2)$ и $(2;\ 1)$?

6. Найдите точки пересечения прямой с осями координат, заданной уравнением:

1) $x + 2y + 3 = 0$; 2) $3x + 4y = 12$; 3) $4x – 2y – 10 = 0$.

7. Проверьте, является ли точка $C(4;\ 2)$ серединой отрезка AB, если: 1) $A(3;\ –1)$, $B(5;\ 5)$; 2) $A(3;\ 6)$, $B(–5;\ –2)$.

8. Определите, какие из точек $A(0; –2)$, $B(4; 2)$, $C(–4;\ –5)$ лежат на прямой, а какие не лежат на прямой $8x – 4y – 8 = 0$?

9. Составьте уравнения прямых, содержащих стороны треугольника ABC, если $A(–1;\ –1)$, $B(–1;\ 3)$ и $C(2;\ 2)$.

§ 8. ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ

35. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА. ДЛИНА И НАПРАВЛЕНИЕ ВЕКТОРА

1. Векторные величины. Вектор. Известные вам из курса математики и физики величины могут быть двух видов. Есть величины, которые вполне определяются своими численными значениями (при данных единицах измерения). Например, длина, площадь, масса.

Определение 1. *Величины, которые полностью определяются своим числовым значением, называются* ***скалярными величинами****, или* ***скалярами****.*

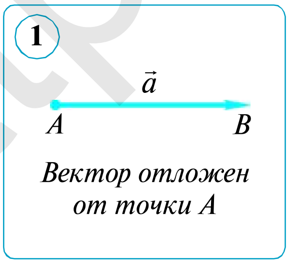
Но существуют и такие величины, которые задаются не только своими численными значениями, но и направлениями. Например, скорость, сила и давление.

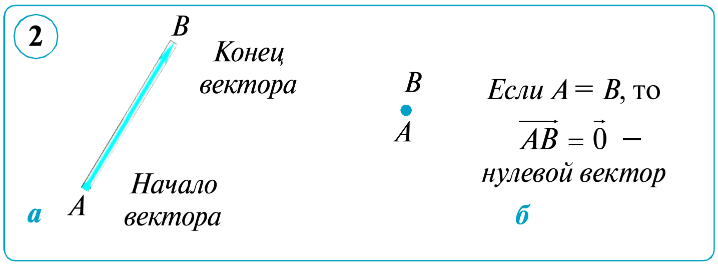
Вектор – это одна из основных геометрических величин. Для того, чтобы получить наглядное представление о векторе, его можно изобразить в виде направленного отрезка, длина которого равна его численному значению. Если говорить о векторах по существу, правильнее будет говорить о множестве всех направленных отрезков, которые лежат на параллельных прямых, имеют одинаковые длины и направления.

Определение 2. *Величины, которые характеризуются не только числовым значением, но и направлением, называются* ***векторными величинами****, или короче* ***векторами****.*

Различные задачи механики, физики и математики, сводящиеся к исследованию величин, которые характеризуются не только числовым значением, но и направлением, приводят к понятию вектора. Например, сила, скорость являются векторами.

Мы часто встречаемся с векторами на практике, например, при движении на транспорте мы ощущаем повороты, торможения и другие изменения скорости как векторы. В естественных науках, наряду со скоростью, имеют дело с ускорением, силой инерции, центробежной силой и тому подобными величинами.





Мы будем изучать свойства векторов с точки зрения математики, независимо от происхождения и природы. Конечно, это изучение приводит и к пониманию природы векторов.

Числовое значение вектора изобразим в виде отрезка. Известно, что у любого отрезка два конца. Один конец отрезка называем *началом*, а другой – *концом* вектора. Рисуют направленные отрезки всегда со стрелкой на конце.

Определение 3. ***Вектором*** *называется направленный отрезок, т.е. отрезок, у которого указаны его начало и конец.*

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается так: $\overline{AB}$ и изображается в виде стрелки, с началом в точке A и концом в точке B. Векторы обозначаются также и одной строчной латинской буквой со стрелкой над ней. Например, $\vec{a}$, $\vec{b}$ и т.д. (рис. 1).

Чтение: вектор $\overrightarrow{AB}$ или вектор $\vec{a}$.

1) *Направление* вектора определяется указанием его начала и конца. При этом начало вектора указывают на первом месте (рис. 2, *а*).

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым вектором*. Запись $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ означает, что точки A и B совпадают (рис. 2, *б*).

2) *Абсолютной величиной* или *модулем* вектора называется длина отрезка, изображающего вектор.

Длина (*модуль*) вектора $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ обозначается так: $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$ (рис. 3).

Длина (модуль) вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ – это длина направленного отрезка, или, *то же самое*, *длина отрезка* AB: $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$. Поэтому в геометрии модуль вектора называется также *длиной вектора*.

Модуль (*длина*) нулевого вектора считается равной нулю: $|\vec{0}| = 0$.

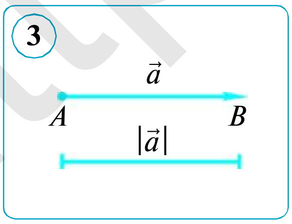
2. Равенство векторов.

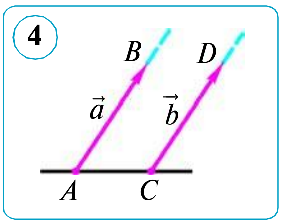
Определение 4. *Ненулевые векторы называются* ***коллинеарными,*** *если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.*

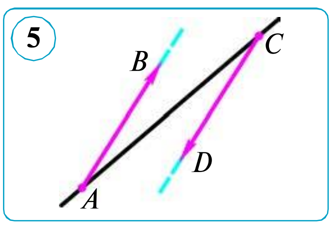
Коллинеарность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Два ненулевых вектора, лежащие на параллельных прямых, называются: 1) *сонаправленными*, если они лежат в одной полуплоскости от прямой, проходящей через их начала (рис. 4); 2) *противоположно направленными*, если они лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, проходящей через их начала (рис. 5).

Если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$: 1) *сонаправлены*, то пишут: $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$; 2) *противоположно направлены*, то пишут: $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.







Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Определение 5. *Два вектора ($\vec{a}$ и $\vec{b}$) называются* ***равными****, если* они сонаправлены и их длины равны.

Таким образом, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, если $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ и $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$. Равенство векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a}=\vec{b}$.

Вектор, равный данному, можно изобразить направленным отрезком с началом в любой точке плоскости (рис. 6), иными словами, вектор можно отложить от любой точки плоскости с сохранением его модуля и направления. Говорят, что вектор, отложенный от данной точки, получен *параллельным переносом исходного вектора*.

Вопросы, задачи и задания

1. 1) Что такое вектор? Как обозначаются векторы?
2) Какие два вектора называются равными? Какие векторы называются сонаправленными (противоположно направленными)? Что такое абсолютная величина (модуль) вектора?

2. В параллелограмме $ABCD$ (рис. 7) запишите векторы: 1) сонаправленные с вектором $\overrightarrow{DC}$; 2) сонаправленные с вектором $\overrightarrow{AO}$; 3) противоположно направленные с вектором $\overrightarrow{AD}$; 4) противоположно направленные с вектором $\overrightarrow{BD}$; 5) равные вектору $\overrightarrow{AB}$; 6) равные вектору $\overrightarrow{OC}$; 7) равные вектору $\overrightarrow{OB}$.

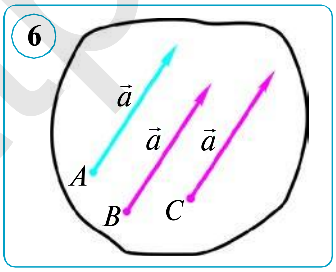
3. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Запишите все векторы, имеющие началами и концами вершины параллелограмма и точку пересечения диагоналей. Какие из них коллинеарны векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BO}$?

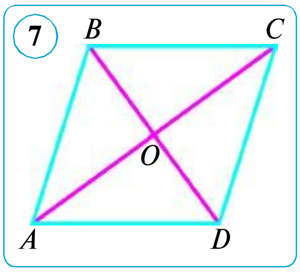
4. Докажите, что в параллелограмме $ABCD$ векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ равны.

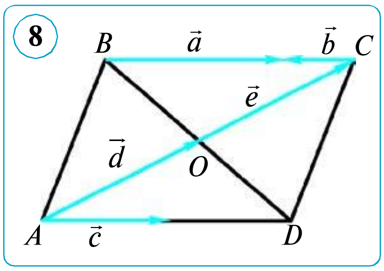
5. Известно, что $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Верны ли следующие утверждения:
1) $AB \parallel CD$; 2) $|AB|=|CD|$?

6. $ABCD$ – параллелограмм. Среди векторов на рис. 8 укажите все пары векторов, которые: 1) коллинеарны; 2) сонаправлены; 3) противоположно направлены; 4) имеют одинаковые модули.

7. Что можно сказать о направлениях векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$?







36–37. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

1. Сложение векторов. Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 1, *а*). Отметим произвольную точку *A* и отложим от этой точки вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$. Затем от точки *B* отложим $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\vec{b}$.

Теперь из точки *A*, начала вектора $\vec{a}$, проведем вектор в точку *C*, конец вектора $\vec{b}$ (рис. 1, *б*). *Вектор* $\overrightarrow{AC}$ *называется* ***суммой векторов*** $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Это правило сложения двух векторов называется «*правилом треугольника* (*трех точек*)».

Сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a}+\vec{b}$.

Правило треугольника можно сформулировать также следующим образом:

если A, B и C — произвольные точки, то:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

Подчеркнем, что это равенство справедливо для произвольных точек *A*, *B* и *C*, в частности, в том случае, когда две из них или даже все три совпадают (рис. 1, *в*).

2. Законы сложения векторов. Как вы знаете, противолежащие стороны параллелограмма равны и параллельны. Тогда векторы, идущие по сторонам параллелограмма в одинаковых направлениях, будут равными.

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарны. От произвольной точки *A* отложим векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ и на этих векторах построим параллелограмм *ABCD* (рис. 2). По правилу треугольника:

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\vec{b}+\vec{a}.$$

Отсюда следует, что $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

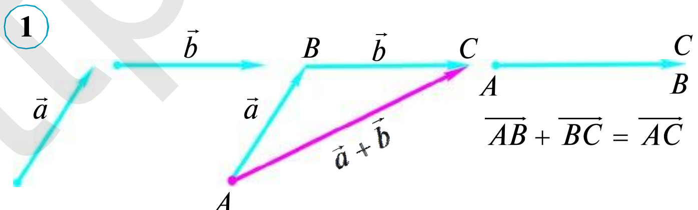
Значит, сумма двух векторов не зависит от порядка слагаемых, т.е. для любых векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *справедливо равенство:*

$$\boldsymbol{\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}}.$$

Это равенство выражает *переместительной закон* сложения векторов.

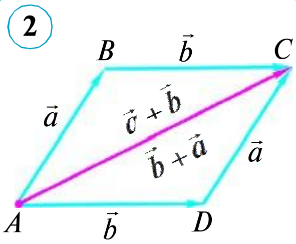
В параллелограмме *ABCD*, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вектор-сумма $\overrightarrow{AC}$ состоит из диагонали, проведенной из общего начала

1



а *б* *в*

2



слагаемых векторов. Обычно, такой способ сложения векторов называется «*правилом параллелограмма*» (рис. 2).

Теперь рассмотрим сумму трех $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ векторов. От произвольной точки A отложим вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, от точки B – вектор $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, а от точки C – вектор $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$ (рис. 3). Применяя правило треугольника, получим:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD};$$

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}.$$

Отсюда следует, что *для любых векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ *имеет место равенство* $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

Это равенство выражает *сочетательный закон* сложения векторов.

Сумма трех ненулевых векторов может быть равна нулевому вектору. Например, рассмотрим треугольник ABC (рис. 4). Сумма трех векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$, идущих по сторонам треугольника *ABC равна нулевому вектору, т.е.* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$. Итак, если начало первого вектора совпадает с концом последнего вектора, то сумма данных векторов равна нулевому вектору.

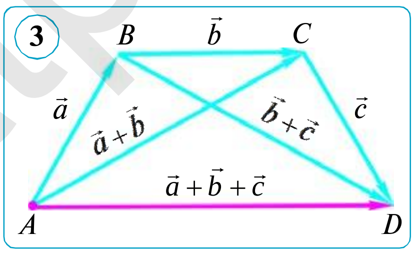
Определение 1. *Если сумма двух векторов равна нулевому вектору, то* ***каждый из этих векторов*** *называется* ***противоположным другому***.

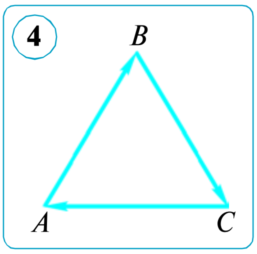
Иначе, если $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$, то вектор $\vec{b}=\overrightarrow{BA}$ называется *противоположным* вектору $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ (и обратно) и обозначается так: $\vec{b}=-\vec{a}$, $\vec{a}=-\vec{b}$ (рис. 5). Если сложить противоположные векторы (по правилу треугольника), то в сумме получится нулевой вектор. В этом случае длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, и они параллельны, и противоположно направлены, т.е. $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ и $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$. Итак, *для каждого вектора* $\vec{a}$ *существует такой противоположный вектор* $-\vec{a}$, *что* $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

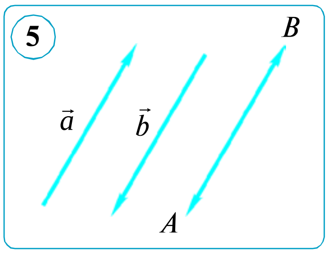
Из выше изложенных рассуждений придем к следующему выводу.

Противоположными векторами *называются два противоположно направленных вектора одинаковой длины.*

Нуль-вектор считается противоположным самому себе.







3. Вычитание векторов. Вычитание векторов, как и вычитание чисел, это действие, обратное сложению.

Определение 2. ***Разностью*** *двух векторов* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *называется такой вектор* $\vec{c}$*, дающий в сумме с вектором* $\vec{b}$ *вектор* $\vec{a}$*:* $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$.

Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ так же, как разность чисел обозначается так: $\vec{a}-\vec{b}$. Вычитание двух векторов определяется как сложение первого вектора с вектором, противоположным второму и он равен вектору $\vec{a}+(-\vec{b})$ (рис. 6, *б*).

Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 6, *а*). Рассмотрим сумму векторов $\vec{a}$ с вектором $-\vec{b}$, противоположным вектору $\vec{b}$.

Для любых векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *справедливо равенство* $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Действительно, $\left(\vec{a}+(-\vec{b})\right)+\vec{b}=\vec{a}+\left((-\vec{b})+\vec{b}\right)=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

От какой какой-либо точки O отложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, тогда для нахождения разности $\vec{a}-\vec{b}$, удобно пользоваться следующим правилом (рис. 6, *в*):

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}.$$

Из правила видно, что началом вектора разности является конец вектора $\vec{b}$, а конец – концом вектора $\vec{a}$, т.е. вектор-разности соединяет концы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направлены в сторону уменьшаемого.

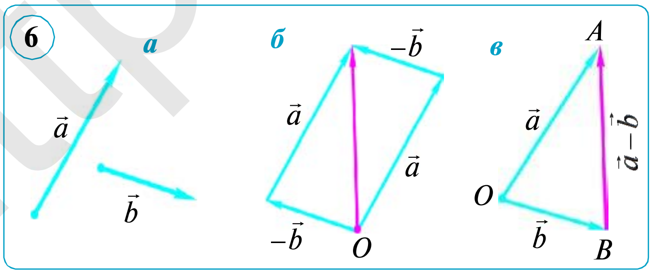
Если при сложении векторов использовать правило параллелограмма (рис. 7), разность векторов идет по второй диагонали параллелограмма.

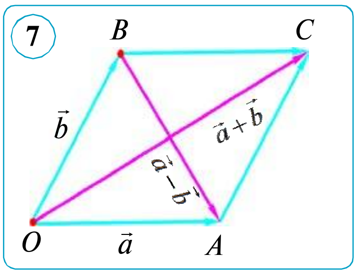
Задача. Дан треугольник ABC. Выразите векторы: 1) $\overrightarrow{BA}$; 2) $\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

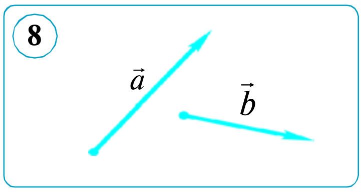
Решение. 1) Векторы $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AB}$ – противоположные векторы, поэтому $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$ или $\overrightarrow{BA}=-\vec{a}$.

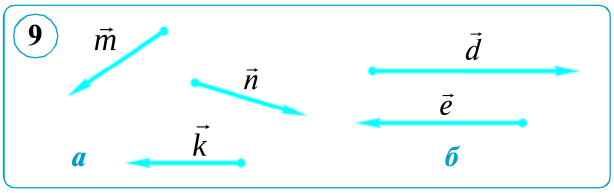
2) По правилу треугольника: $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$. Но $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}$, поэтому

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\vec{a}-\vec{b}.$$









Вопросы, задачи и задания

1. 1) Как найти сумму векторов по правилам треугольника и параллелограмма? Какой вектор называется разностью двух векторов?
2) Какой вектор называется противоположным данному?

2. На рисунке 8 изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Постройте вектор $\vec{a}+\vec{b}$ двумя способами.

3. На рисунке 9 изображены векторы $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{k}$, $\vec{d}$ и $\vec{e}$. Постройте векторы: 1) $\vec{m}+\vec{n}+\vec{k}$; 2) $\vec{d}+\vec{e}$.

4. На рис. 10 изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, $\vec{d}$ и $\vec{e}$. Постройте векторы: 1) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$; 2) $\vec{e}-\vec{d}$.

5. Дан параллелограмм $ABCD$. Выполняется ли равенство $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$? Проверьте.

6. В ромбе $ABCD$: $AD=20$ cm, $BD=24$ cm, O – точка пересечения диагоналей. Найдите $|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{OB}|$.

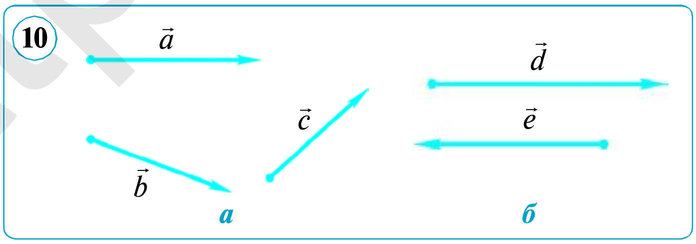
7. $ABCD$ – произвольный четырехугольник. Докажите, что $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$.

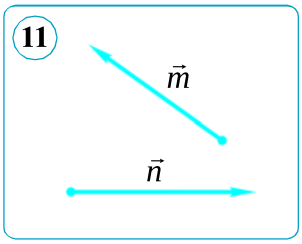
8. Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите векторное равенство $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ («правило параллелограмма»).

9. В параллелограмме $ABCD$: $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{b}$. Выразите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

10. Точки E и F – середины сторон AB и AC треугольника ABC. Выразите векторы $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{BC}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{AE}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{AF}$.

11. На рисунке 11 изображены векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$. Постройте вектор $\vec{m}+\vec{n}$ двумя способами.





38–39. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

1. Умножение вектора на число. Выберем некоторый вектор $\vec{a}$ и найдем сумму $\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$ (рис. 1). Обозначим эту сумму как $3\cdot\vec{a}$ и, естественно то, что это выражение назовем произведением вектора $\vec{a}$ на число 3.

Определение. *Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число k называется такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k|\cdot|\vec{a}|$,* причем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $k>0$, и противоположно направлены при $k<0$. *Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.*

Произведение вектора $\vec{a}$ на число k обозначается так: $k\vec{a}$. По определению: $|k\vec{a}|=|k|\cdot|\vec{a}|$.

Из определения произведения вектора на число непосредственно следует, что: 1) *произведение любого вектора на число нуль есть нулевой вектор;* 2) *для любого числа k и любого вектора $\vec{a}$ векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарны.*

Умножение вектора на число обладает следующими основными свойствами.

Для любых чисел k, l и любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ справедливы равенства:

1°. $(k\cdot l)\vec{a}=k\cdot(l\vec{a})$ – *сочетательный закон.*

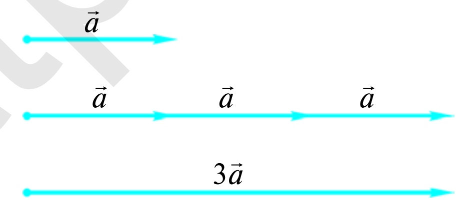
2°. $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ – *первый распределительный закон.*

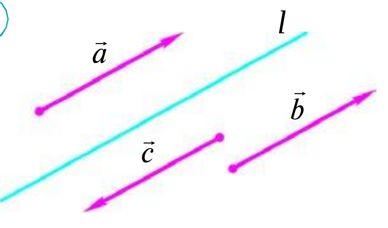
3°. $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ – *второй распределительный закон.*

4°. $k\cdot\vec{0}=0\cdot\vec{a}=\vec{0}$.

Еще раз напоминаем, что два вектора называются ***коллинеарными****, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой.*

Пусть дана прямая l и векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ параллельные данной прямой (рис. 2). По определению коллинеарных векторов, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны. Здесь векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, а вектор $\vec{c}$ противоположно направлен относительно векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

1


2


Нам известно, что вектор, получаемый при умножении вектора на число, параллелен с направлением данного вектора. Отсюда получаем следующее важное свойство:

вектор, умноженном на некоторое число коллинеарен данному вектору.

Теорема.

Если умножить ненулевой вектор на число, обратное его модулю, то получим единичный вектор.

Доказательство. Пусть $|\vec{a}|$ модуль вектора $\vec{a}$. Найдем модуль произведения вектора $\vec{a}$ на число $k = \frac{1}{|\vec{a}|}$:

$$|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1.$$

Итак, каждый вектор равен произведению модуля этого вектора на сонаправленный с ним единичный вектор.

Вектор, модуль которого равен 1, называется *единичным вектором*. Обозначим единичный вектор, сонаправленный с вектором $\vec{a}$ через $\vec{e}$, и в соответствии с теоремой: $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ или умножив это равенство на число $|\vec{a}|$, приходим к равенству: $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}$.

Итак, *каждый вектор равен произведению модуля этого вектора на сонаправленный с ним единичный вектор.*

Задача 1. При каких значениях k верны утверждения:

1) $|k\vec{a}| < |\vec{a}|$; 2) $|k\vec{a}| > \vec{a}$; 3) $|k\vec{a}| = |\vec{a}|$, где $\vec{a} \neq \vec{0}$?

Решение. 1) При $\vec{a} \neq \vec{0}$, $|k\vec{a}| < |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| \cdot |\vec{a}| < |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| < 1 \Leftrightarrow -1 < k < 1$;

2) при $\vec{a} \neq \vec{0}$, $|k\vec{a}| > |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| \cdot |\vec{a}| > |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| > 1 \Leftrightarrow k < -1$ или $k > 1$;

3) при $\vec{a} \neq \vec{0}$, $|k\vec{a}| = |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}| \Leftrightarrow |k| = 1 \Leftrightarrow k = -1$ или $k = 1$.

Ответ: 1) $-1 < k < 1$; 2) $k < -1$ или $k > 1$; 3) $k = -1$ или $k = 1$ верны утверждения.

2. Координаты вектора. Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат xOy, т.е. выбраны взаимно перпендикулярные прямые, отмечена точка O – *начало координат*, выбраны *направления* и *единичные векторы* осей координат. Произвольной точке A сопоставляются две ее координаты – абсцисса x и ордината y: $A(x;\ y)$. Единичные векторы осей координат обозначим $\vec{i}$ (оси абсцисс) и $\vec{j}$ (оси ординат) соответственно. Их длины равны единице, а направления совпадают с направлениями соответствующих осей координат (рис. 3, *a*).

Пусть на плоскости дана точка A с координатами $(x;\ y)$. Рассмотрим треугольник OA_xA. В этом треугольнике $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{A_xA}$. Но так как $OA_x = x$, $A_xA = OA_y = y$, то вектор $\overrightarrow{OA_x} = x \cdot \vec{i}$, $\overrightarrow{A_xA} = y \cdot \vec{j}$. Отсюда

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} . \qquad (1)$$

Равенство (1) называется *координатным представлением вектора* $\vec{a}$.

Итак, вектор с началом в точке O и концом в точке $A\,(x;\ y)$ может быть выражен через векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ в виде (1) равенства.

Пара векторов $(\vec{i};\ \vec{j})$ *называется базисом координатной системы*, а сами векторы $\vec{i}$; $\vec{j}$ — базисными векторами, числа x и y — *координатами вектора* $\vec{a}$.

Если известно координатное представление (1) вектора, то говорят, что вектор задан своими координатами и записывается в виде $\vec{a}(x;\ y)$:

$$\vec{a}(x;y) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} . \qquad (2)$$

Определение. *Если* $A_1(x_1;\ y_1)$ *и* $A_2(x_2;\ y_2)$, то числа $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ *будут координатами вектора* $\overrightarrow{A_1A_2}$ (рис. 4).

Координаты вектора записывают в скобках рядом с его буквенным обозначением: $\overrightarrow{A_1A_2}\,(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$. Иногда для обозначения с координатами $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ используют запись $\overline{(x_2 - x_1; y_2 - y_1)}$. Очевидно, что нулевой вектор имеет нулевые координаты: $\vec{0}(0;0)$.

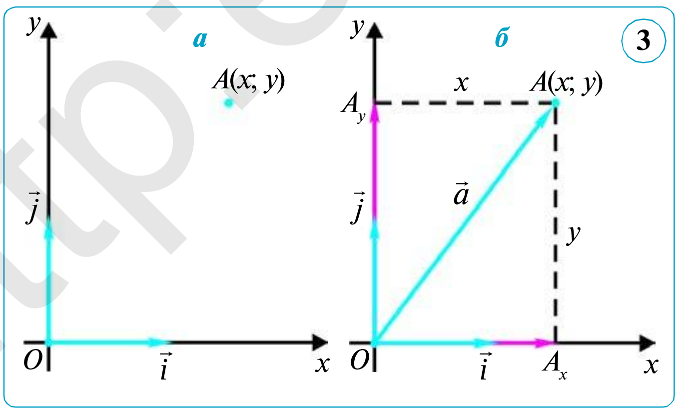
Из формулы расстояния между точками имеем:

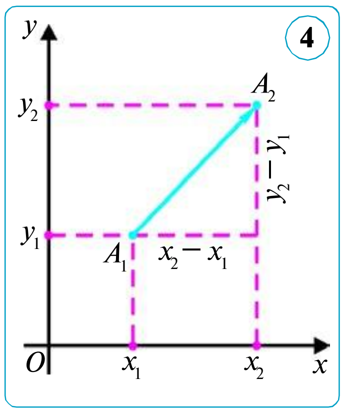
длина вектора $\vec{a}\,(a_1;\ a_2)$ вычисляется по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Правило. *Каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.*

В частности, если вектор отложен от начала координат, то координаты вектора равны координатам его конца. Так как (0; 0), то координаты вектора $\overrightarrow{OA}$ равны соответствующим координатам точки A.

Если $A\,(x;\ y)$, то $\overrightarrow{OA}(x;y) = \overline{(x;y)}$.





Свойство и *признак* координат равных векторов приведем без доказательства.

Теорема.

Равные векторы имеют равные координаты, и наоборот, если у векторов соответствующие координаты равны, то эти векторы равны.

Вывод 1. Если координаты вектора совпадают с координатами его конца, то начало вектора совпадает с началом координат (рис. 3, *б*).

Вывод 2. Если даны координаты вектора $\vec{a}(a_1; a_2)$ и координаты $B(x_2; y_2)$ его конца, то для определения координат $A(x_1; y_1)$ его начала достаточно из координат B вычесть соответствующие координаты вектора $\vec{a}(a_1; a_2)$:

$$x_1 = x_2 - a_1; \quad y_1 = y_2 - a_2. \qquad (1)$$

Вывод 3. Если даны координаты вектора $\vec{a}(a_1; a_2)$ и координаты $A(x_1; y_1)$ его начала, то для определения координат $B(x_2; y_2)$ конца вектора достаточно сложить координаты точки с соответствующими координатами вектора $\vec{a}(a_1; a_2)$:

$$x_2 = x_1 + a_1; \quad y_2 = y_1 + a_2. \qquad (2)$$

Задача 2. Найдите координаты четвертой вершины параллелограмма $ABCD$, если $A(-2; 1)$, $B(0; 4)$, $C(4; 1)$.

Решение. Если четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Пусть $D(x; y)$ – искомая вершина. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \overline{(0-(-2); 4-1)} = \overline{(2; 3)}, \quad \overrightarrow{DC} = \overline{(4-x; 1-y)}.$$

Таким образом, $4 - x = 2$ и $1 - y = 3$, откуда $x = 2$ и $y = -2$.

Ответ: $D(2; -2)$.

Задача 3. Даны координаты начала $A(-1; 5)$ вектора $\vec{a}(2; -3)$. Найдите координаты конца B вектора.

Решение. Воспользовавшись результатами вывода 3, находим искомые координаты:

$$x_2 = -1 + 2 = 1, \quad y_2 = 5 + (-3) = 2.$$

Ответ: $B(1; 2)$.

Задача 4. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$, если $A(-3; 0)$ и $B(5; -4)$.

Решение. 1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}(5-(-3); -4-0) = \overrightarrow{AB}(8; -4) = \overline{(8; -4)}$;

2) $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\overline{(8; -4)} = \overline{(-8; -(-4))} = \overline{(-8; 4)}$.

Ответ: $(8; -4)$; $(-8; 4)$.

Примечание! *Если известны координаты какого-нибудь вектора, то для определения координат вектора, противоположного данному, нет необходимости заново вычислять координаты противоположного вектора, достаточно заменить знаки соответствующие координатам данного вектора.*

Вопросы, задачи и задания

1. 1) Что называется произведением вектора на число?
2) Назовите свойства умножения вектора на число.
3) Как обозначаются единичные векторы осей координат?

2. Начертите вектор $\vec{a}$, длина которого равна 2 cm. Постройте векторы $4\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $3\vec{a}$, $1{,}5\vec{a}$, $-1{,}5\vec{a}$.

3. При каких значениях k векторы $\vec{a}$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$ и $k\vec{a}$:
1) сонаправлены; 2) противоположно направлены; 3) равны?

4. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, точка K – середина стороны CD. Выразите векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{AK}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

5. Точка C – середина отрезка AB. Выразите вектор: 1) $\overrightarrow{AC}$ через вектор $\overrightarrow{CB}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ через вектор $\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{AC}$ через вектор $\overrightarrow{BA}$.

6. Упростите выражение:
1) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB})$; 2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DA}$.

7. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если: 1) $A(-1;\ 4)$ и $B(3;\ 9)$; 2) $A(2;\ -5)$ и $B(1;\ -1)$; 3) $A(3;\ 2)$ и $B(3;\ 2)$.

8. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если: 1) $\overrightarrow{AB}(7;\ 24)$; 2) $A(0;\ -1)$ и $B(3;\ -5)$; 3) $A(2;\ -4)$ и $B(2;\ -1)$.

9. Чему равны координаты вектора $\overrightarrow{BA}$, если:
1) $A(-2;\ -3)$, $B(-3;\ -1)$; 2) $A(m;\ n)$, $B(-m;\ -n)$?

10. Даны точки $A(-1;\ -3)$, $B(2;\ -4)$, $C(-3;\ -1)$ и $D(5;\ 2)$. Равны ли векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$?

11. Найдите m, если длина вектора $\vec{a}(m; 24)$ равна 25.

12. Найдите координаты конца (B) конца вектора $\vec{a}(-7;\ -8)$, если координаты начала $A(5;\ -3)$.

13. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если:
1) $A(-3;\ 1)$ и $B(5;\ -5)$; 2) $A(12;\ 0)$ и $B(0;\ -5)$.

40. ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕКТОРАМИ, ЗАДАННЫМИ СВОИМИ КООРДИНАТАМИ

Познакомимся с тем, как выполняются линейные (арифметические) действия (сложения, вычитания и умножения на число) над векторами, заданными своими координатами.

1. Сложение векторов, заданных своими координатами.

Определение. *Суммой векторов* $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ и $\vec{b}(b_1;\ b_2)$ *называется вектор* $\vec{c}(c_1; c_2)$ *с координатами* $c_1 = a_1 + b_1,\ c_2 = a_2 + b_2$.

Таким образом, $\vec{a}(a_1;\ a_2) + \vec{b}(b_1;\ b_2) = \vec{c}(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2)$, или

$$\overline{(a_1;\ a_2)} + \overline{(b_1;\ b_2)} = \overline{(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2)}.$$

Для любых векторов $\vec{a}(x_1;\ y_1)$, $\vec{b}(x_2;\ y_2)$ *и* $\vec{c}(c_1; c_2)$ *справедливы равенства:*

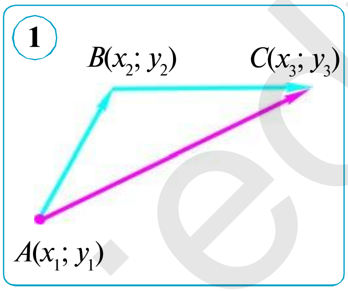
1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$; 2) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$; 3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

Для доказательства этих свойств достаточно сравнить соответствующие координаты векторов в правой и левой частях каждого равенства.

Теорема.

Для любых точек A, B и C выполняется векторное равенство:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$



Доказательство. Пусть $A(x_1; x_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ – данные точки (рис. 1). Выразив координаты векторов-слагаемых, имеем:

$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1),\quad \overrightarrow{BC}(x_3 - x_2;\ y_3 - y_2).$$

По определению суммы векторов, для вычисления координат вектора-суммы сложим соответствующие координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$x_2 - x_1 + x_3 - x_2 = x_3 - x_1,\quad y_2 - y_1 + y_3 - y_2 = y_3 - y_1.$$

Следовательно, координаты вектора-суммы совпадают с координатами вектора $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AC}(x_3 - x_1;\ y_3 - y_1)$.

По теореме равных векторов: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Теорема доказана.

Докажите, равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, пользуясь рис. 2.

Таким образом, *для того, чтобы найти сумму векторов, достаточно сложить соответствующие координаты этих векторов.*

2. Вычитание векторов, заданных своими координатами.

Определение. *Разностью векторов* $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ и $\vec{b}(b_1;b_2)$ называется такой вектор $\vec{c}(c_1;c_2)$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$: $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$.

Отсюда находим координаты вектора $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$:

$$c_1=a_1-b_1,\ \ c_2=a_2-b_2.$$

Для того чтобы найти разность двух векторов, достаточно вычесть из координат уменьшаемого вектора соответствующие координаты вычитаемого вектора. т.е.:

$$\vec{a}(a_1;a_2)-\vec{b}(b_1;b_2)=\vec{c}(a_1-b_1;\ a_2-b_2),\text{ или}$$

$$\overline{(a_1;a_2)}-\overline{(b_1;b_2)}=\overline{(a_1-b_1;a_2-b_2)}.$$

3. Умножение вектора, заданного своими координатами, на число.

Определение. *Произведение вектора* $\vec{a}(a_1,\ a_2)$ на число k называется вектор $\overline{(ka_1;\ ka_2)}$, т.е.: $k\vec{a}=\overline{(ka_1;\ ka_2)}$.

По определению, $\overline{(a_1;\ a_2)}\cdot k=k\overline{(a_1;\ a_2)}$.

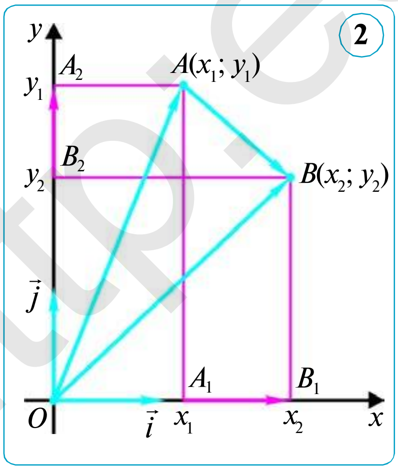
Таким образом, *для того чтобы найти произведение вектора на число (или число k на вектор $\vec{a}$), достаточно умножить соответствующие координаты вектора на это число.*

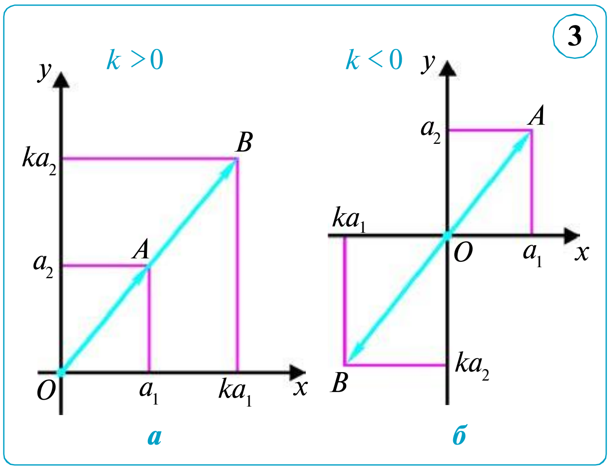
Проверьте самостоятельно справедливость умножения вектора на число (темы 38–39), а также основные свойства на координатах, пользуясь рис. 3. Убедитесь, что основные свойства в координатах также будут верными. По этой причине их здесь не рассматривали.

Задача 1. Найдите сумму векторов $\vec{a}(3;5)$ и $\vec{b}(2;7)$.

Решение. $\vec{a}(3;5)+\vec{b}(2;\ 7)=\overline{(3;\ 5)}+\overline{(2;\ 7)}=\overline{(3+2;\ 5+7)}=\overline{(5;\ 12)}$.

Значит, координаты вектора $\vec{a}+\vec{b}$ равны (5; 12).





Задача 2. Найдите разность векторов $\vec{a}(-3;\ 5)$ и $\vec{b}(3;\ -3)$.

Решение. $\vec{a}(-3;\ 5)-\vec{b}(3;\ -3)=\overline{(-3;\ 5)}-\overline{(3;-3)}=\left(\overline{-3-3;\ 5-(-3)}\right)=$
$=\overline{(-6;\ 8)}$. *Ответ:* $\overline{(-6;\ 8)}$.

Задача 3. Найдите координаты вектора $\vec{b}$, противоположного вектору $\vec{a}(3;\ 5)$.

Решение. Вектор $\vec{b}$, противоположный вектору $\vec{a}$, равен:

$$\vec{b}=-\vec{a}=-1\cdot\vec{a}=-1\cdot\overline{(3;\ 5)}=\overline{(-3;\ -5)}.$$

Ответ: $\vec{b}(-3;\ -5)$, или $\overline{(-3;-5)}$.

Задача 4. Найдите координаты вектора $\vec{b}=4\vec{a}$, если $\vec{a}(-3;\ 4)$.

Решение. $\vec{b}=4\vec{a}=4\cdot\overline{(-3;\ 4)}=\overline{(4\cdot(-3);\ 4\cdot 4)}=\overline{(-12;\ 16)}$.

Ответ: $\vec{b}$ (–12; 16), или (–12; 16).

Вопросы, задачи и задания

1. 1) Как выполняется сложение (вычитание) двух векторов, заданных своими координатами?

2) Как выполняется умножение вектора на число, заданного своими координатами?

2. Найдите координаты:

1) суммы; 2) разности векторов, если $\vec{a}$ (–4; 8) и $\vec{b}$ (1; –4).

3. Даны векторы $\vec{a}$ (–2; 6) и $\vec{b}$ (–2; 4). Найдите координаты вектора:

1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $\vec{b}-\vec{a}$; 4) $-\vec{a}-\vec{b}$.

4. Даны векторы $\vec{a}$ (2; 3) и $\vec{b}$ (–1; 0). Найдите координаты вектора:

1) $2\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-3\vec{b}$; 3) $2\vec{b}-\vec{a}$.

5. Даны векторы $\vec{a}$ (2; –3) и $\vec{b}$ (–2; –3). Найдите координаты вектора:

1) $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$; 2) $\vec{c}=-2\vec{a}+\vec{b}$; 3) $\vec{c}=-3\vec{a}-2\vec{b}$.

6. Даны векторы $\vec{a}=-2\vec{i}-3\vec{j}$ и $\vec{b}=-2\vec{j}$. Найдите координаты вектора:

1) $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$; 2) $\vec{c}=-4\vec{a}+3\vec{b}$; 3) $\vec{c}=-3\vec{a}+4\vec{b}$.

7. Даны векторы $\vec{a}=-2\vec{i}+2\vec{j}$ и $\vec{b}=3\vec{i}$. Найдите координаты вектора:

1) $\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}$; 2) $\vec{c}=4\vec{a}-\vec{b}$.

8. Даны векторы $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$ и $\vec{b}=2\vec{j}$. Найдите координаты вектора:

1) $\vec{c}=-\vec{a}-2\vec{b}$; 2) $\vec{c}=\vec{a}-5\vec{b}$.

9. Даны векторы $\vec{a}=-3\vec{i}$ и $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}$. Найдите координаты вектора:

1) $\vec{c}=-2\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{c}=-\vec{a}-\vec{b}$.

41. ФИЗИЧЕСКИЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ВЕКТОРОВ. РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КООРДИНАТ

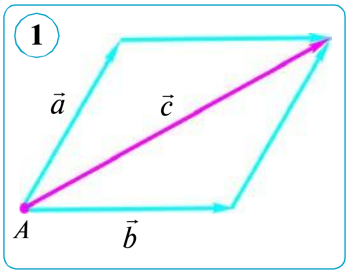
1. Физические и геометрические интерпретации векторов.

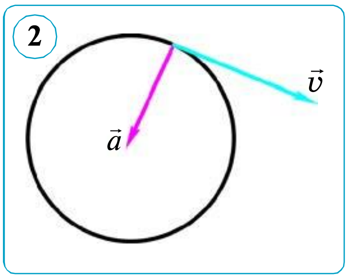
1. Сила действующая на тело, изображается вектором, направление которого совпадает с направлением действия силы, а модуль равен абсолютной величине силы. Из практики известно, что действие двух или нескольких сил, приложенных к телу, можно представить как действие равнодействующей силы, равной сумме всех действующих на тело сил. На рисунке 1 изображены в виде векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ две силы, действующие на тело в точке A. Равнодействующая этих сил будет изображаться вектором

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}\,.$$

Говорят, что вектор, изображающий равнодействующую силу, *разложен на составляющие векторы*, *указывающие на величины и направления действия этих сил.*

2. В физике *поступательным движением* называется такое движение, при котором каждая точка тела за одинаковое время в одном и том же направлении перемещается на одинаковое расстояние в одном и том же направлении. Таким образом, *вектор перемещения* имеет тот же смысл, что и вектор в нашем понимании. Разница только в том, что в курсе геометрии рассматривались векторы, параллельные фиксированной плоскости, тогда как в физике с самого начала рассматриваются пространственные векторы.





3. В физике «векторы» понимаются в более широком смысле. Например, вектором считается скорость. Если в геометрии вектор имеет длину, измеряемой в метрах, то абсолютное значение скорости понимается в физике как метры в секунду (m/s). Таким образом, в геометрии скорость рассматривается как *векторная величина*. Векторные величины характеризуются не только абсолютным значением, но и направлением. При надлежащем выборе масштаба векторные величины можно сравнивать с геометрическими векторами.

Сложению векторных величин и умножению их на число соответствуют соответствующие понятия, относящиеся к геометрическим векторам.

Рассмотрим пример. На рис. 2 вектор $\vec{v}$ можно представить как скорость при вращательном движении, а вектор $\vec{a}$ как вектор ускорения. Но с точки зрения физики их нельзя, например, складывать как обычные векторы. Тем не менее есть смысл говорить о скорости и ускорении как о векторах.

Такая вольность в обращении с терминами не влияет на общность рассуждений. Примерно то же самое мы делаем и в геометрии, отождествляя длину стороны треугольника с самой этой стороной.

2. Решение геометрических задач методом координат.

Векторы широко используются для решения геометрических задач и в доказательстве теорем.

Задача 1. Точка C – середина отрезка AB, а O – произвольная точка плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ (рис. 3, *а*).

Решение. Способ 1. По правилу треугольника:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}.$$

Складывая эти равенства, получим:

$$2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}).$$

Так как C – середина отрезка AB, то $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$, т.к. сумма противоположных векторов равна нулевому вектору.

Таким образом, $2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, или $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

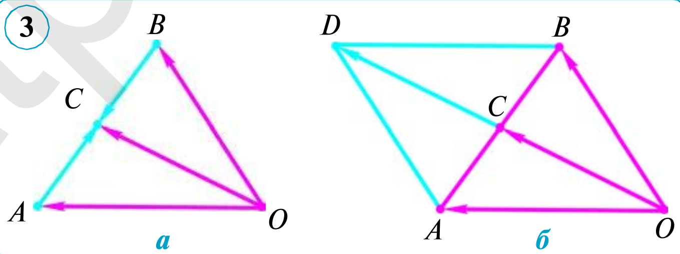
Способ 2. Дополним треугольник OAB до параллелограмма (рис. 3, *б*). Тогда $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$ (по правилу параллелограмма). Диагонали параллелограмма пересекаясь, делятся пополам, поэтому $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OC}$.

Следовательно, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OC}$. Откуда: $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

Задача 2. Докажите, что середины сторон произвольного четырехугольника $ABCD$ являются вершинами параллелограмма.

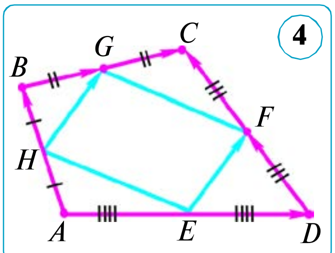
Решение. Пусть E, F, G, H – соответственно середины сторон AB, BC, CD и DA (рис. 4). В силу третьего признака параллелограмма, достаточно доказать, что, например, отрезки EF и HG равны по длине и параллельны. На языке векторов это означает, что нужно доказать равенство векторов $\overrightarrow{EF}$ и $\overrightarrow{HG}$.

3



а *б*

4



Действительно,

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right), \quad \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DG} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right).$$

Кроме того, очевидно, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$. Поэтому, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$. Откуда следует, что отрезки EF и HG равны по длине и параллельны. Итак, середины сторон произвольного четырехугольника $ABCD$ являются вершинами параллелограмма. Что и требовалось доказать.

Из приведенных доказательств видно, что решение задач и доказательство теорем в векторном виде подобны алгебраическим решениям и доказательствам. Эта процедура алгебраизации решения задач состоит из трех этапов подобно тому, как это происходит при решении текстовых алгебраических задач.

Первый этап. Условия задачи надо записать в векторном виде, вводя удобные векторы (подобно тому, как вводятся неизвестные величины и составляется алгебраическое уравнение).

Второй этап. С помощью средств векторной алгебры исходное условие задачи, записанное в векторной форме, преобразуется к такому виду, который даст решение задачи в векторном виде (подобно решению алгебраического уравнения).

Третий этап. Полученное векторное соотношение истолковывается в исходных терминах (подобно тому, как записывается ответ задачи, после того как решено алгебраическое уравнение).

Вопросы, задачи и задания

1. Найдите длину медианы CC_1 треугольника с вершинами $A(3;\ 1)$, $B(1;\ 3)$ и $C(0;\ 2)$.

2. Точка K – середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. Выразите вектор $\overrightarrow{KC}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

3. Даны точки $A(2;\ 4)$, $B(3;\ 6)$ и $C(6;\ 14)$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

4. Даны две противоположные вершины квадрата $ABCD$: $A(0; 4)$ и $C(6; 0)$. Найдите координаты двух других вершин.

5. Найдите координаты конца (B) вектора $\vec{a}(-3; 8)$, если координаты начала $A(-2; 3)$.

6. Используя векторы, докажите, теорему о средней линии трапеции.

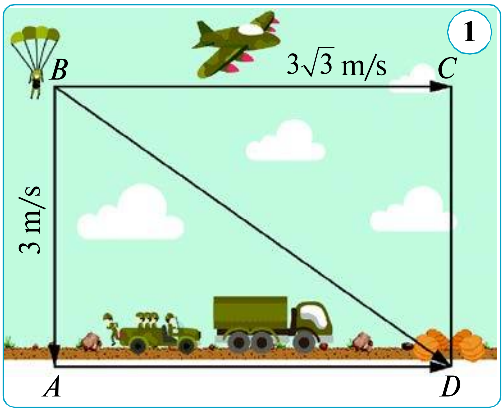
7. Даны векторы: $\vec{a}(1;\ 3)$, $\vec{b}(-2; 4)$, $\vec{c}(-1;\ -3)$, $\vec{d}(-4;\ 4)$, $\vec{p}(3;\ 9)$, $\vec{q}(-1;\ 2)$. Найдите среди этих векторов: 1) сонаправленные векторы; 2) пары противоположно направленных векторов.

8. Точка N – середина отрезка CD ромба $ABCD$. Выразите вектор $\overrightarrow{AN}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

42. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ, РАЗВИВАЮЩИЙ ПРАКТИЧЕСКИЕ КОМПЕТЕНЦИИ

1. Задачи на практические применения векторов.



Задача 1. Парашютист спускался на землю со скоростю 3 m/s, а порывом ветра его начинает относить в сторону со скоростью $3\sqrt{3}$ m/s. Под каким углом к вертикали спускается парашютист (рис. 1)?

Решение. Пусть парашютист находится в точке B. Равнодействующая сила тяжести ($\overrightarrow{BA}$) и сила ветра ($\overrightarrow{BC}$), есть вектор $\overrightarrow{BD}$ и $ABCD$ – прямоугольник, AB – вертикаль. Следовательно, надо найти значение угла ADB.

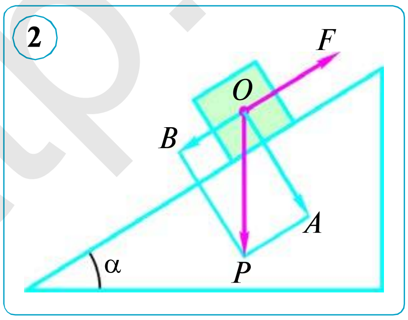
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ и $BC = AD$ ($ABCD$ – прямоугольник ($\angle A = 90°$)). По теореме Пифагора: $BD^2 = AD^2 + AB^2$, значит:

$$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{27+9} = \sqrt{36} = 6 \text{ (cm)}.$$

В треугольнике ABD катет $AB = 3$ cm в 2 раза меньше гипотенузы $BD = 6$ cm. Следовательно, $AB = 0{,}5BD$ и по свойству катета, лежащего против угла в 30° в прямоугольном треугольнике $\angle ADB = 30°$, или $\sin \angle ADB = \frac{AB}{BD} = 0{,}5$, откуда $\angle ADB = 30°$. *Ответ:* $\angle ADB = 30°$.

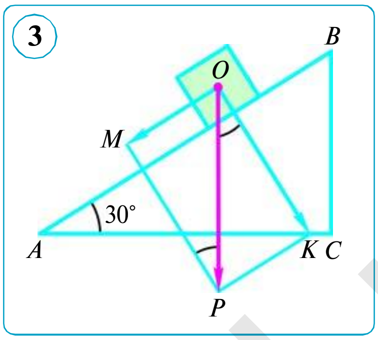
Задача 2. Парашютист спускался на землю со скоростью 4 m/s, а порывом ветра его начинает относить в сторону со скоростью $4\sqrt{3}$ m/s. Под каким углом к вертикали спускается парашютист (рис. 1)? Задачу решите самостоятельно.

Задача 3. С какой силой F надо удержать груз весом P на наклонной плоскости, чтобы он не сползал вниз (рис. 2)?



Решение. Пусть O – центр тяжести груза, к которому приложена сила $\vec{P}$. Разложим вектор $\vec{P}$ по двум взаимно перпендикулярным направлениям, как показано на рис. 2. Сила $\overrightarrow{OA}$ перпендикулярна наклонной плоскости и не вызывает перемещения груза. Сила $\vec{F}$, удерживающая груз, должна быть равной по величине и противоположной по направлению силе $\overrightarrow{OB}$. Поэтому: $F = P\sin\alpha$.

Задача 4. На наклонной плоскости лежит груз $P = 50$ N. Найти скатывающую силу и силу давления на наклонную плоскость, если угол наклона плоскости к горизонту равен 30°.



Дано: $P = 50$ N, $\angle A = 30°$.

Найти: $F_{ск.}$, $F_{давл.}$

Решение. 1) Разложим силу $\overrightarrow{P}$ на две силы: направление скатывающей силы параллельно, направление давления перпендикулярно наклонной плоскости.

2) Строим параллелограмм, его диагональ – вектор $\overrightarrow{OP}$, проводим $OM \parallel AB$, $OK \perp AB$, $PK \parallel AB$, $PM \perp AB$, $\overrightarrow{OM} = \vec{F}_{ск.}$, $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{F}_{давл.}$ (рис. 3).

3) $\angle OPM = \angle A = 30°$ ($OP \perp AC$, $PM \perp AB$).

4) Из прямоугольного треугольника OPM:

$$OM = 0{,}5OP = 0{,}5 \cdot 50 = 25; \quad F_{ск.} = 25 \text{ N}.$$

5) Из прямоугольного треугольника OPK по теореме Пифагора:

$$OK = \sqrt{OP^2 - PK^2} = \sqrt{OP^2 - OM^2} = \sqrt{50^2 - 25^2} = \sqrt{25^2 \cdot (4-1)} = 25\sqrt{3} \approx 43,$$

т.е. $F_{давл.} \approx 43$ N.

Ответ: $F_{ск.} = 25$ N, $F_{давл.} \approx 43$ N.

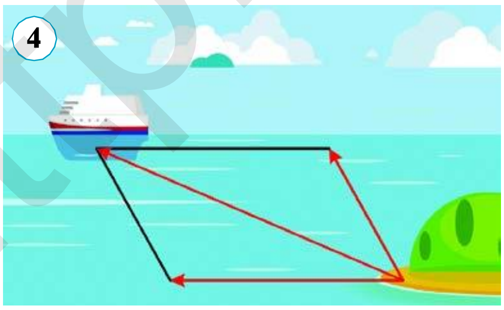
Задача 5. Из практики известно, что если на тело A действуют две силы a и b, то равнодействующая сила равна c, эта сила c изображается в виде диагонали параллелограмма построенного на отрезках a и b. Равнодействующая сила находится по *«правилу параллелограмма»*.

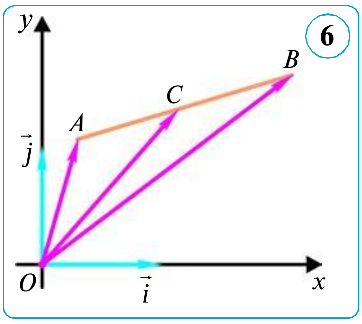
Например, человек, идущий по палубе плывующего корабля (рис. 4), или лодка, пересекающая реку (рис. 5): ее перемещение слагается из перемещений поперек реки и по течению реки. Обозначьте эти силы на рисунке. Составьте похожие задачи и отразите их на рисунке.

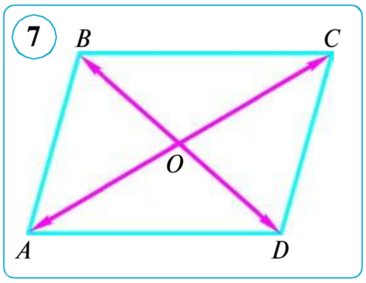
2. Нахождение координат центра масс.

Задача 6. Деление отрезка в данном отношении (в координатной форме).

Точка C делит отрезок AB в отношении λ, если $\overline{AC} = \lambda\overline{CB}$ (рис. 6). Найти координаты x; y точки C, известны координаты концов отрезка: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$.







Решение. Построим векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OB}$. Так как $\overrightarrow{OA}\,(x_1;\ y_1)$, $\overrightarrow{OC}\,(x;\ y)$, $\overrightarrow{OB}\,(x_2;\ y_2)$, $\overrightarrow{AC}\,(x-x_1;\ \ y-y_1)$, $\overrightarrow{CB}\,(x_2-x;\ \ y_2-y)$ и учитывая, что при умножении вектора на число λ, его координаты также умножаются на число λ, имеем:

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}\left(x - x_1;\ y - y_1\right) =$$

$$= \lambda\overrightarrow{CB}\left(x_2 - x;\ y_2 - y\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_1 = \lambda(x_2 - x); \\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y). \end{cases}$$

Следовательно, $x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$.

Задача 7. Массы грузов равные m_1 и m_2 помещены соответственно в точках $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$. Найдите координаты (точки C) центра тяжести этой системы масс.

Решение. Центр тяжести системы C лежит на отрезке M_1M_2 и обратно пропорциональна расстоянию массы m_1 и m_2 помещенные в точках M_1 и M_2, т.е. точка C — центр тяжести системы двух материальных точек делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = \dfrac{m_2}{m_1}$. Значение λ подставим в выведенные формулы в задаче 5, после преобразования находим координаты точки C:

$$x_C = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2}{m_1 + m_2}; \quad y_C = \frac{y_1 m_1 + y_2 m_2}{m_1 + m_2}.$$

3. Задача на доказательство векторных соотношений.

Задача 8. Дан параллелограмм $ABCD$ и O — точка пересечения диагоналей. Докажите, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, O — точка пересечения диагоналей AC и BD, $AO = OC$, $BO = OD$ (рис. 7).

Требуется доказать: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

Доказательство. Покажем, что разность равна нулевому вектору.

1) $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})-(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}.$

В доказательстве использовались правило вычитания суммы от суммы, сочетательный закон, правило треугольника, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ (противоположные стороны параллелограмма и сонаправленные векторы), определение нулевого вектора.

2) $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})-(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}) = (\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DD} = \vec{0}.$

В доказательстве использовались правило вычитания суммы от суммы, правило треугольника, сочетательный закон, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ и определение нулевого вектора.

43–44. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 3. РАБОТА НАД ОШИБКАМИ

1. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точки $A(-2; 3)$ и $B(4; 0)$.
2. Составьте уравнение окружности с центром C и радиусом R, если $C(4; 9)$ и $R = 5$.
3. Найдите координаты векторов $\vec{a} - \vec{b}$ и $\vec{b} + \vec{c}$, если $\vec{a}(1; 0)$, $\vec{b}(1; 2)$ и $\vec{c}(1; 3)$.
4. Даны векторы $\vec{c}(-1; 0)$ и $\vec{d}(1; 2)$. Найдите координаты вектора $2\vec{c} + 3\vec{d}$.

ТЕСТ 3 Проверьте себя!

1. В каких четвертях расположена прямая, проходящая через точки $A(0; -1)$, $B(1; 0)$?
   А) III, IV, I; Б) I, II, III; В) II, III, IV; Г) II, IV.
2. В каких четвертях расположена прямая, проходящая через точки $A(-2; 0)$, $B(-2; 2)$?
   А) I, II, III; Б) II, III; В) II, IV; Г) III, IV, I.
3. Найдите координаты середины отрезка AB, если $A(-4; 0)$, $B(-4; 4)$.
   А) $(-2; 0)$; Б) $(0; 2)$; В) $(2; -4)$; Г) $(-4; 2)$.
4. Найдите координаты середины отрезка AC, если точки $A(-2; 0)$, $B(0; 2)$, $C(2; 0)$ являются вершинами треугольника.
   А) $(-1; 1)$; Б) $(1; 0)$; В) $(0; 0)$; Г) $(0; 1)$.
5. Даны векторы $\vec{a}(-3; 1)$ и $\vec{b}(5; -6)$. Найдите координаты вектора $\vec{c} = \vec{b} - 3\vec{a}$.
   А) $(14; -9)$; Б) $(4; -3)$; В) $(14; -3)$; Г) $(9; 3)$.
6. Даны векторы $A(-3; 0)$ и $B(-5; 4)$. Найдите координаты вектора $\overline{BA}$.
   А) $(-8; -4)$; Б) $(-8; 4)$; В) $(2; -4)$; Г) $(8; -4)$.

Изучаем английский язык!

Уравнение окружности – circle equation
Уравнение прямой – straight-line equation
Коллинеарные векторы – collinear vectors
Длина вектора – vector length
Равные векторы – equal vectors
Скаляр – scalar
Противоположные векторы – opposite vectors
Единичный вектор – unit vector
Сонаправленный – equivalent

Исторические сведения

1. Впервые прямоугольные координаты были введены французским ученым Рене Декартом, поэтому прямоугольную систему координат называют так же *декартовой системой координат.*

Рене Декарт (1596−1650) − французский философ, математик, физик, физиолог. Учился в колледже La-Flesh iezuit, изучал греческий и латинский языки, математику и философию. Философия Декарта связана с ее математикой, космогонией и физикой. Одна из основ аналитической геометрии в математике (прямоугольную систему координат называют его именем).

Рене Декарт
(1596−1650)

Декарт внес значительный вклад в философию XVII−XVIII веков и развитие науки. Работа Декарта в XVII веке привела к методу координат, который революционизировал всю математику, в частности геометрию. Появилась способность интерпретировать алгебраические уравнения с помощью геометрических графиков и наоборот, решать геометрические задачи с помощью аналитических формул и систем уравнений.

Ввод символов, которые сохранились до наших дней, а именно обозначать неизвестные x, y, z, а постоянные величины (коэффициенты) − символами a, b, c, степеней x^2, y^2, z^2, это большая заслуга Рене Декарта.

2. Понятие вектора пришло в математику, в частности, в геометрию, сравнительно недавно. В середине XIX в. понятие вектор встречается в трудах нескольких математиков. На плоскости с векторами впервые (1835 г.) начал работать итальянский ученый **Белливитис** (1803−1880). Кроме того, **К. Гаусс** (1777−1855) в 1831 году в своем труде «Теории биквадратичных вычетов», а также **Я. Арган** (1768−1822) и **К. Вессель** (1745−1818) ввели понятие вектора, рассматривая комплексные числа. Наконец, **У. Гамильтон** (1805−1865) и **Р. Грассман** (1854−1901) разработали понятия векторов и действия над ними. Гамильтон в 1845 году первым сформулировал, в чем состоит отличие скаляров от векторов. Он же впервые ввел в употребление термины «скаляр» и «вектор». Слово «вектор» Гамильтон производил от латинского *vehere* − «переносить» (1845). Первым стал обозначать векторы буквами со стрелкой вверху в 1806 году Арган. Для того, чтобы указать начало и конец вектора, **А. Мебиус** (1790−1868) стал обозначать векторы в виде AB. Грассман называл векторы «отрезками», он стал записывать разложение вектора по осям в виде $x_1e_1 + x_2e_2$, где e_1 и e_2 − единичные векторы осей. Гамильтон и **Дж. Гиббс** (1839−1903) обозначали векторы греческими буквами. Полужирным шрифтом векторы стал обозначать **О. Хевисайд** (1850−1925) в 1931 году. Обозначение длины вектора в виде $|AB|$ ввел в 1905 году **Р. Ганс** (1880−1954).

ГЛАВА IV
ПЛОЩАДЬ

§- 9. ПЛОЩАДЬ МНОГОУГОЛЬНИКА

45. ПОНЯТИЕ О ПЛОЩАДИ

1. Понятие о площади.

Понятие площади нам известно из повседневного опыта. Представление о площадях имеется у каждого из вас и вы уже умеете находить их в простейших случаях. Например, вы знаете, как найти площадь прямоугольника и квадрата, скажем, комнаты, где вы живете и т.д. Наша дальнейшая цель состоит в том, чтобы разъяснить понятие площади.

Геометрическую фигуру будем называть *простой*, если ее можно разбить на конечное число плоских треугольников.

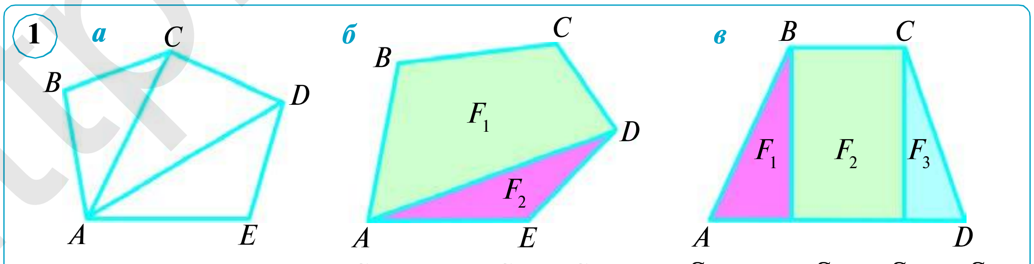
Напомним, что плоским треугольником мы называем конечную часть плоскости, ограниченную треугольником. Выпуклый многоугольник разбивается на плоские треугольники диагоналями, проведенными из какой-нибудь его вершины (рис. 1, *а*).

Для простых фигур ***площадь*** – это положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами (аксиомами).

Свойство 1. *Равные фигуры имеют равные площади.*

Свойство 2. *Если многоугольник составлен из нескольких неперекрывающихся многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.*

Говоря, что фигура F составлена из нескольких неперекрывающихся фигур имеется в виду то, что: 1) F состоит из суммы площадей этих фигур и 2) любые два из этих многоугольников не имеют



$S_{ABCDE} = S_{F_1} + S_{F_2}$ $\qquad$ $S_{ABCD} = S_{F_1} + S_{F_2} + S_{F_3}$

общих внутренних точек. Например, на рис. 1, *б* и 1, *в* многоугольники составлены из неперекрывающихся многоугольников.

Свойства 1 и 2 называют *основными свойствами площадей.*

2. Измерение площадей. Измерение площади проводится с помощью выбранной единицы измерения аналогично измерению длин отрезков. В результате получается *численное значение площади* данной фигуры.

Площадь – это одна из основных математических характеристик плоской фигуры. В простейших случаях значение площади фигуры можно получить, посчитав число единичных квадратов, т.е. квадратов со стороной, равной единице длины, из которых составлена данная фигура.

Свойство 3. *Площадь квадрата со стороной, равной единице длины, равна единице площади.*

Таким образом, справедлива следующая теорема (утверждение).

Теорема.

Площадь квадрата со стороной *a* равна a^2.

Обычно, площадь обозначается заглавной латинской буквой *S*. Значит, площадь квадрата со стороной *a* вычисляется по формуле:

$$S = a^2.$$

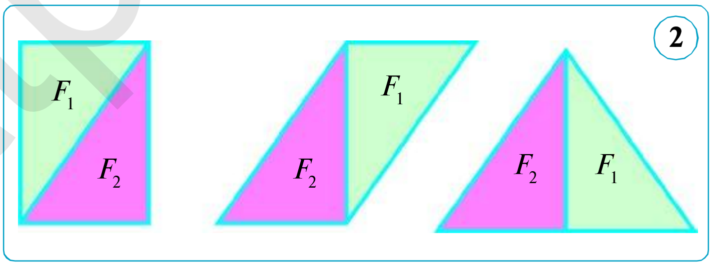
3. Равновеликие фигуры.

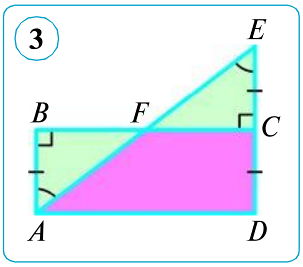
Определение. *Если один из двух многоугольников составлен из фигур, равных соответственно тем, из которых составлен другой многоугольник, то эти многоугольники называются* ***равносоставленными****.*

Если два многоугольника имеют равные площади, то они называются ***равновеликими многоугольниками*** (рис. 2).

Равные многоугольники равновелики (свойство 1), но обратное утверждение, что если две фигуры будут равновеликими, то они будут равными, вообще говоря, будет не верным.

Задача. На продолжении стороны *DC* прямоугольника *ABCD* отмечена точка *E*, симметричная точке *D* относительно вершины *C* (рис. 3). Докажите, что площадь треугольника *ADE* равна площади прямоугольника *ABCD*.





Доказательство. Пусть F — точка пересечения сторон AE и BC. Треугольники ABF и ECF равны (по катету и острому углу: $AB = EC$, $\angle BAF = \angle E$). Треугольник ADE составлен из трапеции $AFCD$ и треугольника ECF, а прямоугольник $ABCD$ составлен из той же трапеции $AFCD$ и треугольника ABF, равного ECF. Таким образом, треугольник ADE и прямоугольник $ABCD$ составлены из, соответственно, равных фигур и, следовательно, равны их площади. Что и требовалось доказать.

Практически можно измерить или вычислить площадь любой фигуры, если такая площадь существует. Чаще для определения площадей различных фигур пользуются формулами. Установлением формул площадей некоторых фигур мы займемся в следующих темах.

Вопросы, задачи и задания

1. 1) а) Что называется простой фигурой? б) Что вы понимаете под площадью фигуры? в) Сформулируйте основные свойства площади.
2) Какие два многоугольника называются равносоставленными?
3) Какие фигуры называются равновеликими?

2. Найдите площадь квадрата, если его сторона равна:
1) 1,3 cm; 2) 0,15 dm; 3) 2,5 cm; 4) 18 dm; 5) 2,5 m.

3. Найдите сторону квадрата, если его площадь равна: 1) 16 dm^2; 2) 144 cm^2; 3) 121 cm^2; 4) 49 mm^2; 5) 0,64 dm^2; 6) 6,25 m^2.

4. Найдите площадь квадрата, периметр которого равен периметру прямоугольника со сторонами 54 см и 42 см.

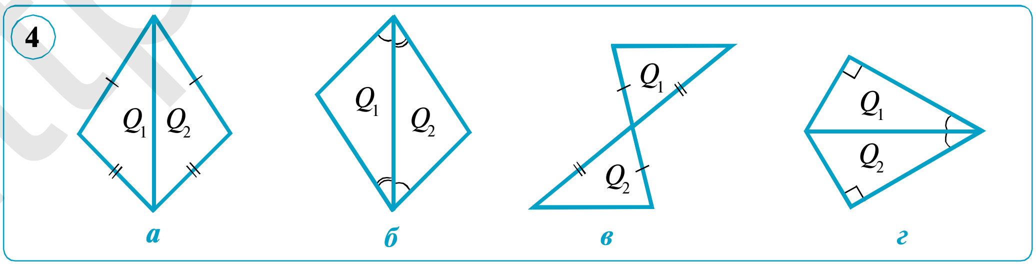
5. Докажите, что треугольники Q_1 и Q_2, на рисунке 4 равны.

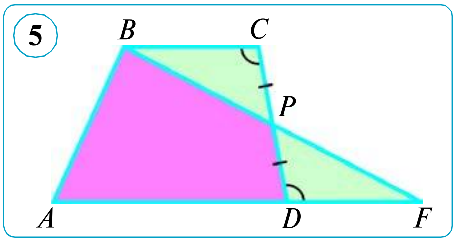
6. Площадь квадрата равна 36 cm^2. Какой станет площадь квадрата, если все его стороны: 1) увеличить в 2 раза; 2) уменьшить в 3 раза; 3) увеличить на 2 cm?

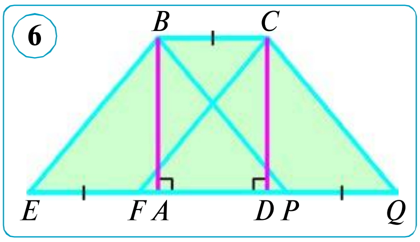
Образец. Площадь квадрата равна 81 cm^2. Какой станет площадь квадрата, если все его стороны уменьшить на 1 cm?

Решение. Сторона данного квадрата равна $a = 9$ cm, а сторона нового квадрата равна $a_1 = a - 1 = 9 - 1 = 8$ (cm). Тогда $S_{нов.} = 8^2 = 64$ (cm^2). Если все стороны данного квадрата уменьшить на 1 cm, то тогда его площадь уменьшится на $S - S_{нов.} = 81 - 64 = 17$ (cm^2).

Ответ: уменьшится на 17 cm^2.







7. Следует ли из равносоставленности двух прямоугольников:
1) равенство этих прямоугольников; 2) их равновеликость?

8. Как изменится площадь квадрата, если все его стороны: 1) увеличить в n раз? 2) уменьшить в k раз?

9. Нарисуйте квадрат. Нарисуйте другой квадрат, сторона которого в 2 раза больше, чем сторона первого квадрата. Во сколько раз площадь второго квадрата больше площади первого?

10. Пусть AD – большее основание трапеции $ABCD$. Через середину P стороны CD и через вершину B проведена прямая, пересекающая луч AD в точке F (рис. 5). Докажите, что $S_{ABCD} = S_{ABF}$.

Доказательство. 1) $\triangle BCP = \triangle FDP$ – по стороне и двум прилежащим к ней углам ($CP = ...$ – ..., $\angle BCP = \angle ... - ...$ и ... , так как эти углы ... при пересечении параллельных прямых ... и ... секущими ... и ... , $\angle BPC = \angle ... - ...$), т.е. $S_{BCP} = ...$.

2) $S_{ABCD} = S_{ABPD} + ...$, $S_{ADP} = S_{ABPD} + ...$, поэтому $S_{ABCD} = ...$.

Заполните пропуски.

11. Найдите периметр квадрата, если его площадь равна:
1) 2,25 cm^2; 2) 0,81 dm^2; 3) 289 mm^2; 4) 5,76 m^2; 5) 400 dm^2.

12. На рисунке 6 укажите равновеликие фигуры.

13. Территория Республики Узбекистан составляет 448,9 тысяч km^2. Около 80 % этого площади занимает равнина. Сколько тысяч квадратных километров составляет площадь равнины?

Знать это полезно!

- S – от латинского слово «***superfacies***», означает «***поверхность***».
- Площади материков, государств выражаются в квадратных километрах, поля больших размеров измеряются в гектарах. Поля, не столь великие по площади, измеряются в сотках.

46–47. ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА И ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

1. Площадь прямоугольника.

Вы решали задачи, находя площадь прямоугольника как произведение его смежных сторон.

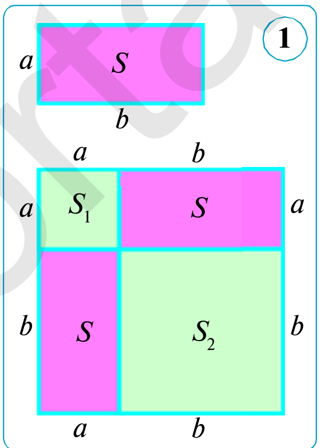
Теперь покажем, что это действие было обоснованным.

Теорема.

Площадь прямоугольника со сторонами *a* и *b* вычисляется по формуле:

$$\boldsymbol{S = a \cdot b.}$$

Доказательство. Дан прямоугольник со сторонами a и b, где a и b – произвольные положительные числа. Докажем, что его площадь вычисляется по формуле $S = a \cdot b$.



Для доказательства теоремы достроим прямоугольник до квадрата со стороной $(a + b)$. Разобьем этот квадрат на части так, как показано на рисунке 1. Мы видим, что его площадь равна сумме двух квадратов со сторонами a и b соответственно и двух прямоугольников со сторонами a и b.

Таким образом, площадь квадрата со стороной $(a + b)$, равна $S_1 + 2S + S_2$. С другой стороны по свойству 3 площадь этого квадрата равна $(a + b)^2$, т.е.

$$S_1 + 2S + S_2 = (a + b)^2, \text{ или}$$
$$S_1 + 2S + S_2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Если принять во внимание, что $S_1 = a^2$, $S_2 = b^2$, то получаем

$$S = a \cdot b.$$

Теорема доказана.

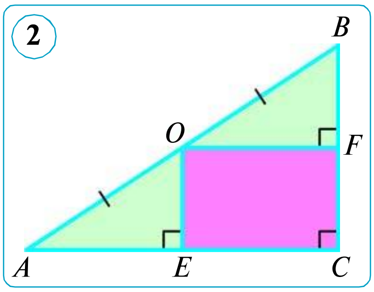
Задача 1. Найдите периметр прямоугольника, если отношение соседних сторон равно 3 : 2, а его площадь равна 150 cm².

Решение. Пусть меньшее основание прямоугольника равно $b = 2x$ cm. Тогда длина большей стороны равна $a = 3x$ cm. Используя формулу для вычисления площади прямоугольника, составим уравнение и решим его:

$$S = 3x \cdot 2x, \text{ т.е. } S = 6x^2.$$

Откуда $x^2 = S : 6$, $x^2 = 150 : 6$, $x^2 = 25$, $x = 5$ (cm).

Итак, меньшая сторона прямоугольника равна $b = 2 \cdot 5 = 10$ (cm), а его большая сторона равна $a = 3 \cdot 5 = 15$ (cm).



Теперь вычислим его периметр:

$$P = 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (15 + 10) = $$
$$= 2 \cdot 25 = 50 \text{ (cm)}.$$

Ответ: $P = 50$ cm.

Задача 2. Катеты прямоугольного треугольника равны 12 cm и 24 cm. Через середину гипотенузы проведены перпендикуляры к катетам. Найдите площадь полученного прямоугольника.

Дано: в прямоугольном $\triangle ABC$: $AO = OB$, $OE \perp AC$, $OF \perp CB$, $AC = 24$ cm, $BC = 12$ cm (рис. 2).

Требуется найти: S_{CEOF}.

Решение. Нам известно, что два перпендикуляра к одной прямой, паралельны. По теореме Фалеса:

$$AE = EC = 0{,}5AC = 0{,}5 \cdot 24 = 12 \text{ (cm)},$$
$$CF = FB = 0{,}5BC = 0{,}5 \cdot 12 = 6 \text{ (cm)}.$$

Итак, $S_{CEOF} = CE \cdot CF = 12 \cdot 6 = 72$ (cm^2).

Ответ: площадь прямоугольника $CEOF$ равна 72 cm^2.

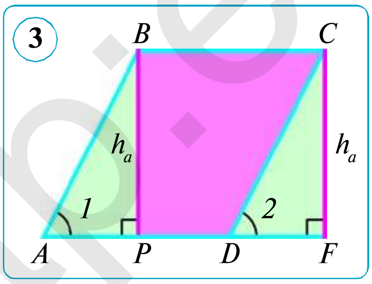
2. Площадь параллелограмма.

Любую сторону параллелограмма можно принять за его *основание*, а перпендикуляр, проведенный из любой точки противоположной стороны к прямой, содержащей основание, – *высотой параллелограмма*. Высота может быть опущена на саму сторону или на ее продолжение. На рисунке 3, BP и CF – высоты параллелограмма $ABCD$.

Теорема.

Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту:

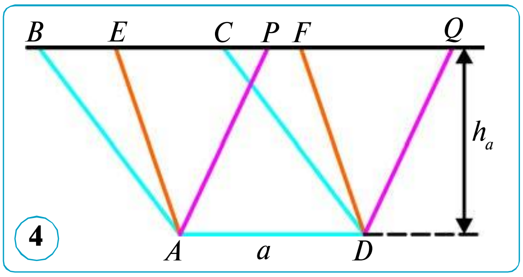
$$\boldsymbol{S = a \cdot h_a}.$$

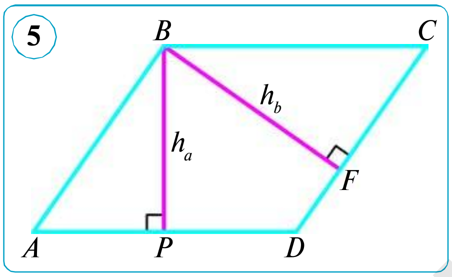


Рассмотрим параллелограмм $ABCD$. Примем за его основание сторону $AD = a$ и пусть его высота будет равна h_a (рис. 3).

Требуется доказать, что $S = a \cdot h_a$.

Доказательство. Построим прямоугольник $PBCF$, имеющий ту же сторону BC и высоту h_a. Треугольники ABP и DCF равны (по гипотенузе и острому углу: $AB = DC$ – гипотенузы, $\angle 1 = \angle 2$ – соответственные углы). Параллелограмм $ABCD$ составлен из трапеции $PBCD$ и треугольника ABP, а прямоугольник $PBCF$ составлен из той же трапеции $PBCD$ и треугольника DCF равного ABP. Следовательно, площадь параллелограмма $ABCD$ равна площади прямоугольника $PBCF$





(т.е. равновеликие). Отсюда следует, что площадь параллелограмма $ABCD$ равна площади прямоугольника $PBCF$, т.е. ah_a.

Итак, площадь S параллелограмма со стороной a и высотой h_a, проведенной к ней, вычисляется по формуле:

$$S = a \cdot h_a.$$

Что и требовалось доказать.

Следствие 1. Если в двух параллелограммах одно основание и высоты равны, то они равносоставленные.

Дано: в параллелограммах $ABCD$, $AEFD$ и $APQD$ одно основание $AD = a$, высоты равны (h_a) (рис. 4).

Требуется доказать, что параллелограммы $ABCD$, $AEFD$ и $APQD$ равносоставленные.

Доказательство. Например, докажем, что параллелограммы $ABCD$ и $AEFD$ равносоставленные. Треугольники BAE и CDF равны (по первому признаку равенства треугольников), так как $BA = CD$ и $AE = DF$, и $\angle BAE = \angle CDF$ (как углы со соответствующими параллельными сторонами). Следовательно, параллелограмм $ABCD$ составлен из трапеции $AECD$ и треугольника BAE, а параллелограмм $AEFD$ составлен из трапеции $AECD$ и треугольника CDF, равного треугольнику BAE. Значит, параллелограммы $ABCD$ и $AEFD$ равносоставленные.

Аналогично, доказываются равносоставленности остальных параллелограммов.

Задача 3. Стороны параллелограмма равны 25 cm и 20 cm. Высота, опущенная на первую сторону, равна 8 cm. Найдите высоту, опущенную на вторую сторону параллелограмма.

Дано: в параллелограмме $ABCD$:

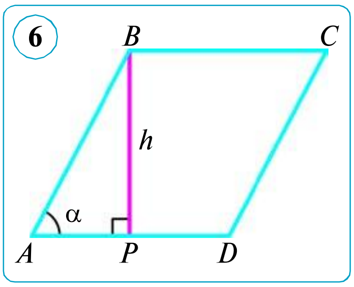
$$AD = a = 25 \text{ cm}, \quad DC = b = 20 \text{ cm}, \quad h_a = 8 \text{ cm (рис. 5).}$$

Требуется найти: h_b.

Решение. 1) $S = ah_a = 25 \cdot 8 = 200$ (cm²).

2) $S = bh_b$, т.е. $200 = 20 \cdot h_b$. Откуда $h_b = 200 : 20 = 10$ (cm).

Ответ: 10 cm.

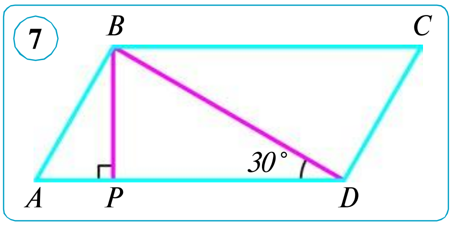


Следствие 2. Площадь параллелограмма равна произведению двух его смежных сторон на синус угла между ними. Докажите.

Доказательство. Пусть в параллелограмме $ABCD$: $AD = a$, $AB = b$ и $\angle BAD = \alpha$. Докажем, что площадь параллелограмма вычисляется по формуле $\boldsymbol{S = ab \sin\alpha}$.

Проведем в параллелограмме $ABCD$ высоту BP и обозначим ее $BP = h_a = h$ (рис. 6). Тогда в прямоугольном треугольнике ABP высота h является катетом, противолежащим углу α. Выразив h через произведение стороны b на синус угла α, имеем: $h = b\sin\alpha$. Подставляем выражение для h, в формулу площади параллелограмма $S = ah$. Отсюда

$$S = ab\sin\alpha.$$



Задача 4. *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм, $AD = 20$ cm, $BD = 16$ cm, $\angle BDA = 30°$.

Требуется найти: S_{ABCD}.

Решение. Способ 1. 1) Проведем высоту BP данного параллелограмма и рассмотрим треугольник BDP (рис. 7). Он прямоугольный, так как $BP \perp AD$. Теперь находим высоту BP. Катет напротив угла 30° равен половине гипотенузы, поэтому:

$$BP = 0{,}5BD = 0{,}5 \cdot 16 = 8 \ \text{(cm)}.$$

2) Таким образом, площадь параллелограмма $ABCD$ равна:

$$S = AD \cdot BP = 20 \cdot 8 = 160 \ (\text{cm}^2)$$

Способ 2. В прямоугольном треугольнике BDP выразим BP через сторону (гипотенузу) BD и синус угла $\angle BDP = 30°$ и подставив в формулу площади параллелограмма, находим искомую площадь:

$$S = AD \cdot BP = AD \cdot BD \cdot \sin\angle BDP = 20 \cdot 16 \cdot \sin 30° =$$
$$= 20 \cdot 16 \cdot 0{,}5 = 160 \ (\text{cm}^2).$$

Ответ: $S = 160$ cm^2.

Вопросы, задачи и задания

1. 1) Чему равна площадь прямоугольника?

2) Какое из свойств (аксиом) площади использовалось при доказательстве теоремы о площади прямоугольника?

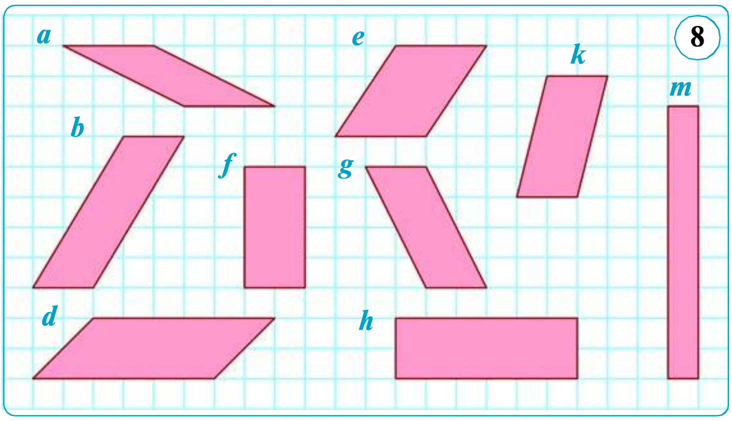
3) Что вы понимаете под основанием и высотой параллелограмма?

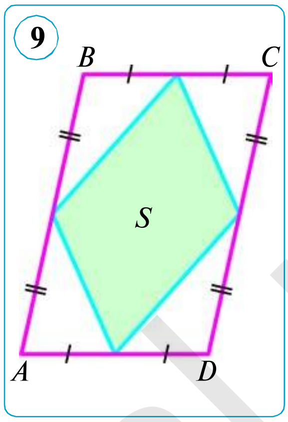
4) Как выражается площадь параллелограмма через смежные стороны и угол между ними?

2. Найдите периметр и площадь прямоугольника, если смежные стороны равны: 1) 30 cm и 2,9 cm; 2) 34 dm и 0,6 dm; 3) 2,5 dm и 12 cm.

3. Найдите периметр и площадь прямоугольника, если одна сторона равна 15 dm, а вторая в 5 раз больше первой.

4. Баскетбольная площадка площадью 240 m^2 составляет 15 % спортивной площадки. Площадь спортивной площадки составляет





32 % от всей школьной площади. Найдите площадь всей школьной площади.

5. Найдите периметр и площадь прямоугольника, если одна сторона равна 23 cm, а вторая сторона на 17 cm больше другой.

6. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 20 cm^2 и 1) длина равна 5 cm; 2) длина составляет 125 % от ширины; 3) одна из сторон равна x.

7. Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если: 1) $AB = 9$ cm, $BC = 4$ cm; 2) $AB : BC = 5 : 7$, $P_{ABCD} = 48$ cm.

8. Пусть одна из сторон параллелограмма равна 16 cm, высота, проведенная к ней равна 9 cm. Найдите сторону квадрата, равновеликого параллелограмму.

9. Пусть a – основание, h – высота, а S – площадь параллелограмма. Найдите: 1) S, если $a = 10$ cm, $h_a = 0{,}5$ m; 2) a, если $h_a = 4$ cm, $S = 48$ cm^2; 3) h_a, если $a = 24$ cm, $S = 120$ cm^2.

10. На рисунке 8 укажите равновеликие параллелограммы.

11. Как изменится площадь прямоугольника, если: 1) его основание уменьшить в 5 раз, а высоту увеличить в 8 раз; 2) и основание, и высоту уменьшить в 2,5 раза?

12. Какую часть составляет площадь S фигуры от площади параллелограмма $ABCD$ на рисунке 9?

13. Найдите площадь прямоугольника, если смежные стороны равны:

1) 24 cm и 20 cm; 3) 8 m и 4,5 m;

2) 3,5 dm и 8 cm; 4) 3,2 dm и 1,5 dm.

14. Площадь параллелограмма равна 36 cm^2, высоты 3 cm и 4 cm. Найдите периметр этого параллелограмма.

15. Найдите площадь параллелограмма двумя способами, если его стороны равны 20 cm и 28 cm, а угол между ними равен 30°.

48. ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

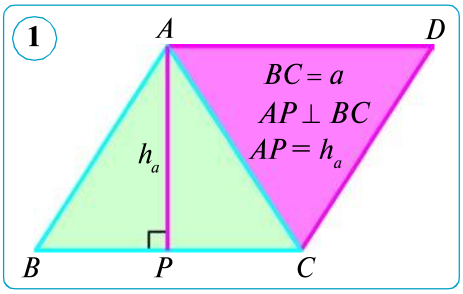
Формулу для вычисления площади треугольника, выведем сведя задачу к нахождению площади параллелограмма.

Теорема.

Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h_a ,$$

где a — основание треугольника, h_a — высота проведенная к основанию.



Доказательство. Пусть дан треугольник ABC (рис. 1). Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABCD$ (BC — основание), как показано на рисунке. Треугольники BAC и DCA равны, так как диагональ AC параллелограмма делит его на два равных треугольника. Поэтому их площади равны. Следовательно, площадь параллелограмма $ABCD$ в два раза больше площади треугольника ABC, т.е. $2S = a \cdot h_a$.

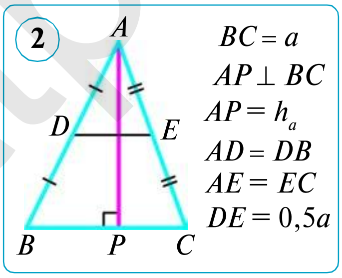
Отсюда, $S = \frac{ah_a}{2}$. Теорема доказана.

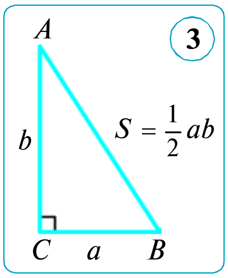
Формулу для площади треугольника можно сформулировать и так: ***площадь треугольника равна произведению средней линии треугольника, параллельной основанию, на высоту, опущенную на это основание*** (рис. 2):

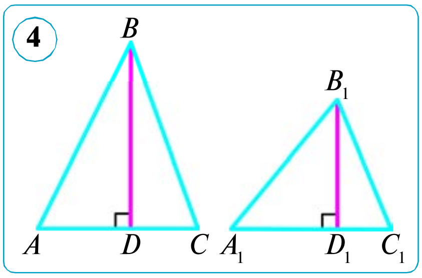
$$S = \frac{a}{2} \cdot h_a .$$

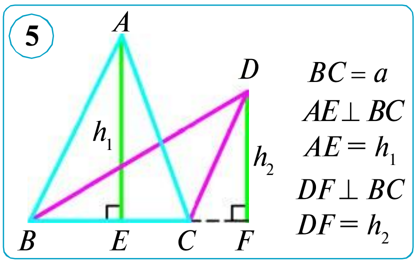
Следствие 1. *Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов,* так как один из катетов можно брать за основание, а второй за высоту (рис. 3).

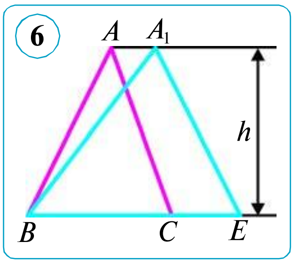
Следствие 2. *Площади двух треугольников относятся как произведения каждого основания на соответствующую высоту* (рис. 4).

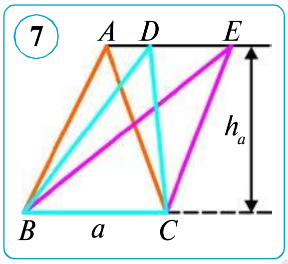












Доказательство. $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \dfrac{0{,}5AC \cdot BD}{0{,}5A_1C_1 \cdot B_1D_1} = \dfrac{AC \cdot BD}{A_1C_1 \cdot B_1D_1}$.

Следствие 3. *Отношение площадей двух треугольников с одинаковыми основаниями равно отношению их высот* (рис. 5).

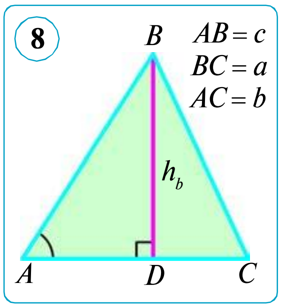
Доказательство. $\dfrac{S_{ABC}}{S_{DBC}} = \dfrac{0{,}5a \cdot h_1}{0{,}5a \cdot h_2} = \dfrac{h_1}{h_2}$.

Следствие 4. *Отношение площадей двух треугольников с одинаковыми высотами равно отношению их оснований* (рис. 6).

Доказательство. $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A_1BE}} = \dfrac{0{,}5 \cdot BC \cdot h}{0{,}5 \cdot BE \cdot h} = \dfrac{BC}{BE} = \dfrac{a}{a_1}$, где $BC = a$, $BE = a_1$.

Следствие 5. *Треугольники с одинаковыми основаниями и высотами равновелики* (рис. 7).

Доказательство. $S_{BAC} = S_{BDC} = S_{BEC} = 0{,}5ah_a$.



Следствие 6. *Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.*

Доказательство. Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ – стороны треугольника ABC. Докажем, что $S = \frac{1}{2}bc\sin A$. Проведем в треугольнике ABC высоту $BD = h_b$ (рис. 8). Выразим h_b через сторону c и синус угла A: $h_b = c\sin A$. Подставляя выражение для h_b в формулу площади треугольника $S = \frac{1}{2}bh_b$, получим формулу:

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A.$$

Аналогично выводятся формулы для вычисления площади треугольника со сторонами a, b и синусом угла C, со сторонами a, c и синусом угла B.

Таким образом, площадь треугольника по двум сторонам и углу между ними вычисляется по формулам:

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A}.$$

Еще одна формула, выражающая площадь треугольника через его стороны была впервые найдена древнегреческим математиком **Героном** (приблизительно I в. н. э.) из Александрии и носит название *формулы Герона*. Формула Герона используется для вычисления площади треугольника в случае, когда известны длины всех трех сторон треугольника.

Проведем доказательство формулы Герона.

Как вы знаете, площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту: $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$.

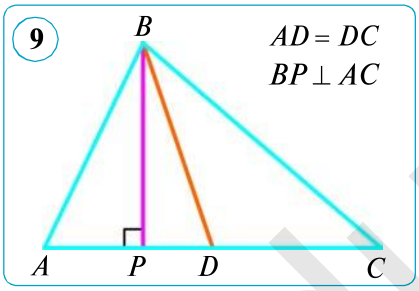
Подставим в эти выражения формулы высот через стороны треугольника

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ и}$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

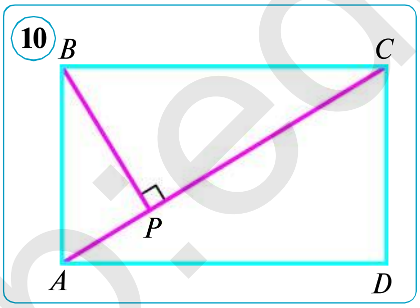
и после упрощения, находим:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } p = \frac{a+b+c}{2}.$$



Задача 1. Докажите, что медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника.

Решение. Пусть BD – медиана треугольника ABC (рис. 9). Треугольники ABD и CBD имеют равные стороны AD и DC и общую высоту BP, т.е. треугольники, на основании следствия 5, равновелики: $S_{ABD} = S_{CBD}$.



Задача 2. Дано: $ABCD$ – прямоугольник, $AC = 20$ cm, $BP = 12$ cm, $BP \perp AC$ (рис. 10).

Требуется найти: S_{ABCD}.

Решение. 1) $S_{ABC} = 0{,}5 AC \cdot BP = 0{,}5 \cdot 20 \cdot 12 = 120$ (cm²).

2) $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABC} = 2 \cdot 120 = 240$ (cm²).

Ответ: $S_{ABCD} = 240$ cm².

Вопросы, задачи и задания

1. 1) Чему равна площадь треугольника?
3) Как вычисляется площадь прямоугольного треугольника?
4) Как вычисляется площадь треугольника по трем сторонам?

2. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катеты равны: 1) 4 cm и 7 cm; 2) 1,2 dm и 25 cm.

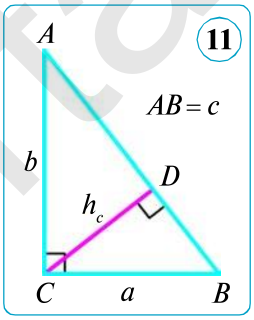
3. Основание одного треугольника 20 cm, высота 8 cm. Основание второго треугольника равна 40 cm. Какой должна быть высота второго треугольника, чтобы они были равновеликими?

4. В треугольнике ABC сторона $AB = 5AC$. Чему равно отношение высот, проведённых из вершин C и B?

5. a — основание треугольника, h — высота, опущенная на основание, S — площадь треугольника. Найдите неизвестные величины.

	1	2	3	4	5	6
a	69 cm	0,8 dm	?	0,25 m	?	0,9 m
h_a	0,5 m	?	20 dm	100 cm	4,8 cm	?
S	?	4 cm^2	2000 cm^2	?	9,6 mm^2	36 dm^2

6. Доказать, что произведение катетов (a и b) равно произведению гипотенузы (c) на высоту (h_c), опущенную из вершины прямого угла на гипотенузу (рис. 11).



Решение. Если один катет принять за основание, то другой катет будет высотой. Поэтому площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов: $S = \frac{1}{2}ab$, откуда $ab = 2S$; $S = \frac{1}{2}ch_c$, откуда $ch_c = 2S$. Значит, $ab = ch_c$. Что и требовалость доказать.

Найдите c (теорема Пифагора) и h_c ($ab = ch_c$), если его катеты равны: 1) 12 cm и 16 cm; 2) 5 cm и 12 cm.

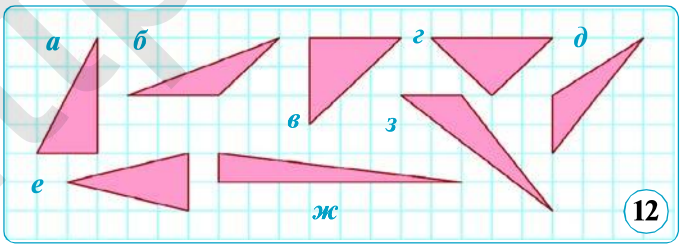
7. На рисунке 12 укажите равновеликие треугольники.

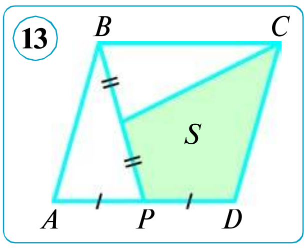
8. Найдите площадь треугольника по трем сторонам: 1) 39 cm, 42 cm, 45 cm; 2) 35 cm, 29 cm, 8 cm; 3) 20 cm, 20 cm, 32 cm.

9. Какую часть составляет площадь S заштрихованной части от площади параллелограмма $ABCD$ на рисунке 13?

10. Площадь треугольника равна 150 cm^2. Найдите периметр треугольника, если его высоты равны 15 cm, 12 cm и 20 cm.

11. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 5 dm и 6 dm, а угол между ними равен 30°. Решите двумя способами.





49–50. ПЛОЩАДЬ РОМБА И ТРАПЕЦИИ

1. Площадь ромба. Так как ромб является параллелограммом, то площадь ромба можно вычислить по стороне a и высоте h_a, по формуле:

$$\boldsymbol{S = ah_a}.$$

Нам известно, что все высоты ромба равны.

Кроме того, площадь ромба можно вычислить с помощью его диагоналей.

Теорема.

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей:

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2},$$

где d_1 и d_2 — диагонали ромба.

Доказательство. Известно, что диагональ AC разбивает ромб на два равных равнобедренных треугольника (рис. 1). Тогда вторая диагональ будет перпендикулярна к первой, и равна удвоенной высоте этих треугольников, поэтому площадь ромба:

$$S = S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot BO + \frac{1}{2} AC \cdot DO = \frac{1}{2} AC \cdot (BO + DO) =$$

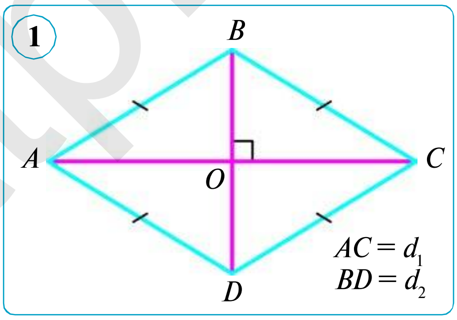
$$= \frac{1}{2} \underline{AC} \cdot \underline{\underline{BD}} = \frac{1}{2} \underline{d_1} \cdot \underline{\underline{d_2}}.$$

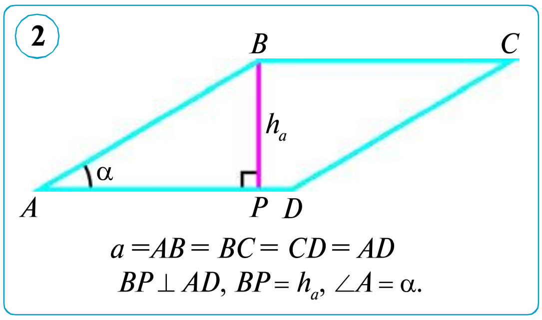
Итак, $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$. Теорема доказана.

Задача 1. Сторона ромба $ABCD$ равна a, а острый угол равен α. Найдите площадь этого ромба. Вычислите площадь ромба, если $\alpha = 30°$.

Решение. 1) Пусть у ромба $ABCD$ $AB = BC = CD = AD = a$, $\angle A = \alpha$. Проведем $BP \perp AD$ (рис. 2). Тогда высота h_a, является катетом, лежащим напротив острого угла α в прямоугольном треугольнике ABP. Выразим h_a через синус острого угла α: $h_a = a \sin \alpha$. Подставим это значение h_a в формулу для вычисления площади ромба $S = ah_a$, получим следующую формулу:

$$S = a^2 \sin\alpha.$$





2) Находим площадь ромба, используя формулу $S = a^2 \sin\alpha$:

$$S = a^2 \sin 30^\circ = a^2 \cdot 0,5 = 0,5a^2 \text{ (кв. ед.)}.$$

Ответ: $S = 0,5a^2$ кв. ед.

Задача 2. Найдите диагонали ромба, если одна из них в 1,5 раза больше другой, а площадь ромба равна 27 cm².

Дано: $ABCD$ – ромб; $S_{ABCD} = 27$ cm²; $AC = 1,5BD$ (см. рис. 1)

Требуется найти: AC, BD.

Решение. Пусть $BD = x$ cm, тогда $AC = 1,5x$ cm. Подставив эти обозначения в $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$, получим: $27 = \frac{1}{2} \cdot 1,5x \cdot x$. Тогда $x^2 = 36$, откуда $x = 6$ (cm). Таким образом, $BD = 6$ cm, $AC = 1,5 \cdot 6 = 9$ (cm).

Ответ: 9 cm, 6 cm.

2. Площадь трапеции. Известно, что любой выпуклый многоугольник можно разбить на треугольники, проведя его диагонали, исходяшие из одной его вершины. Поэтому для того чтобы вычислить площадь многоугольника, его надо предварительно разбить на треугольники. Затем вычислить их площади. По 2-му свойству площадь многоугольника равна сумме площадей составляющих его треугольников. Воспользуемся этим способом при вычислении площади трапеции.

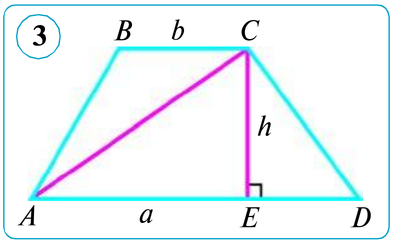
Теорема.

Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h,$$

где a и b – основания трапеции, h – высота трапеции.

Доказательство. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями $AD = a$, $BC = b$ и высотой $CE = h$ ($CE \perp AD$) (рис. 3).



Диагональ трапеции AC разделяет трапецию $ABCD$ на два треугольника ABC и ACD. Следовательно, площадь трапеции будет равна сумме площадей этих треугольников. Так как расстояние между параллельными прямыми постоянна, то высоты треугольников ABC и ACD равны между собой.

Откуда, $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot CE = \frac{1}{2} b \cdot h$ и $S_{ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CE = \frac{1}{2} a \cdot h$.

Площадь трапеции $S = S_{ABC} + S_{ACD}$, т.е.:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h + \frac{1}{2} b \cdot h \quad \text{или} \quad S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Площадь трапеции равна произведению ее средней линии на высоту.*

Это следует из того, что средняя линия равна полусумме ее оснований.

Задача 3. Основания трапеции равны 15 cm и 30 cm, а площадь равна 225 cm². Найдите ее высоту.

Решение. Средняя линия трапеции равна:

$$\frac{a+b}{2}=\frac{15+30}{2}=\frac{45}{2}=22,5 \text{ (cm)}.$$

Значит, высота трапеции равна:

$$h=S_{\text{тр.}}:\frac{a+b}{2}=225:22,5=10 \text{ (cm)}.$$

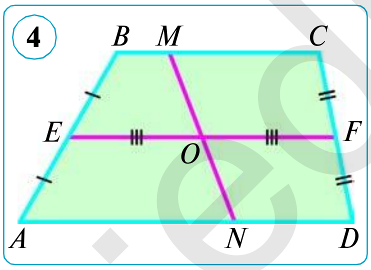
Ответ: $h = 10$ cm.

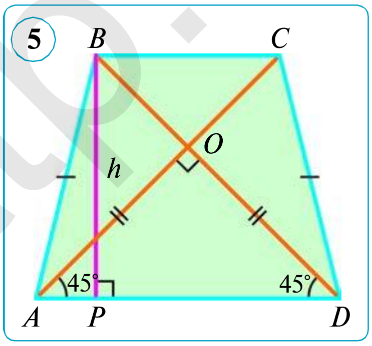
Задача 4. Докажите, что прямая, проходящая через середину средней линии трапеции и пересекающая основания, делит эту трапецию на две равновеликие части.

Решение. Пусть $ABCD$ – трапеция ($AD \parallel BC$), EF – средняя линия, а MN – прямая, проходящая через середину O средней линии и пересекающая основания в точках M и N (рис. 4). Трапеции $ABMN$ и $MNDC$ имеют равные средние линии EO и OF соответственно и высоты, равные высоте исходной трапеции. Следовательно, площади этих трапеций равны, т.е. равновелики:

$$S_{ABMN}=S_{MNDC}.$$

Что и требовалось доказать.





Задача 5. Докажите, что если диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, то высота трапеции равна ее средней линии, и площадь трапеции равна квадрату ее высоты.

Дано: $ABCD$ – равнобедренная трапеция ($AB=DC$), $AC \perp BD$, $AD=a$, $BC=b$ (рис. 5).

Требуется доказать:

1) $h=\frac{a+b}{2}$; 2) $S_{\text{тр.}}=h^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

Решение. 1) $\triangle AOD$ – равнобедренный прямоугольный треугольник, поэтому $\angle ADO = 45°$.

2) Опустим из вершины B высоту $BP \perp AD$. Треугольник BPD также равнобедренный прямоугольный треугольник, так как $\angle ADO = 45°$, и значит, $\angle PBD = 45°$.

Откуда $DP = BP$. Нам известно, что по свойству высоты равнобедренной трапеции, опущенной из вершины меньшего основания:

$$BP = DP = \frac{a+b}{2}.$$

3) $S_{\text{тр.}} = \frac{a+b}{2} \cdot h = h \cdot h = h^2$ или $S_{\text{тр.}} = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b}{2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

Таким образом, мы доказали полностью, что если диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, то высота трапеции равна ее средней линии, и площадь трапеции равна квадрату ее высоты.

Вопросы, задачи и задания

1. 1) Как можно найти площадь ромба с помощью его стороны и высоты?
2) Как можно найти площадь ромба с помощью его диагоналей? Выразите ее.
3) Чему равна площадь трапеции?

2. Площадь ромба равна 40 см², а высота равна 5 см. Найдите периметр этого ромба.

3. Найдите площадь ромба, если его: 1) высота 16 cm, а острый угол равен 30°; 2) сторона 1,8 dm, а острый угол равен 30°.

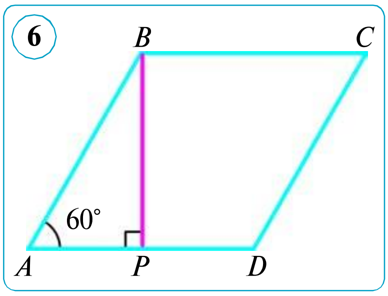
4. Площадь ромба равна 60 cm², а одна из диагоналей – 10 cm. Найдите вторую диагональ этого ромба.

5. Площадь ромба равна 30 cm², а периметр равен 24 cm. Найдите высоту этого ромба.

6. *Дано:* $ABCD$ – ромб. $\angle BAD = 60°$, $BP \perp AD$, $BP = 12$ cm (рис. 6).

Требуется найти: S.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник BPA. По определению синуса острого угла: $\sin A = \frac{BP}{AB}$. Подставив в это равенство данные, находим AB:



$$\sin A = \frac{BP}{AB} \Rightarrow AB = \frac{BP}{\sin A} = \frac{12}{\sin 60°} =$$

$$= 12 : \frac{\sqrt{3}}{2} = 12 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}} \text{ (cm)}.$$

Подставив $AB = a = \frac{24}{\sqrt{3}}$, $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ в формулу площади ромба через сторону и острый угол, имеем:

$$S = a^2 \cdot \sin 60° = \left(\frac{24}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{576}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 96\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

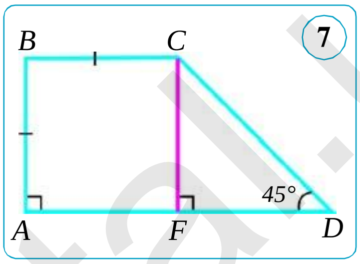
Ответ: $96\sqrt{3}$ cm².

7. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны:
1) 1,5 dm и 1,8 dm; 2) 24 cm и 15 cm; 3) 3,2 cm и 0,5 dm.

8. 1) Найдите площадь трапеции, основания которой 11 cm и 18 cm, а высота 6 cm.

2) Основание трапеции равно 26 cm, высота 10 cm, а площадь 200 cm². Найдите второе основание трапеции.

9. В прямоугольной трапеции $ABCD$, $AB = BC = 18$ cm, $\angle D = 45°$ (рис.7). Найдите площадь трапеции. Заполните пропуски.



Решение. Проведем $CF \perp AD$. 1) $ABCF$ − квадрат, так как в прямоугольника $ABCF$ смежные стороны AB и ..., поэтому $AF = CF = ...$ (cm).

2) $\triangle CFD$ − прямоугольный, $\angle F = 90°$ по построению, $\angle D = 45°$ по условию, поэтому $\angle DCF = ...°$ и, следовательно, $\triangle CFD$ − ... и $DF = ... = ...$ (cm).

3) $AD = AF + ... = ... + ... = ...$ (cm) и $S_{ABCD} = ... \cdot ... = ... \cdot ... = ...$ (cm²).

Ответ: ... cm².

10. Найдите площадь ромба, если его углы относятся как 1 : 5, а сторона равна *a*.

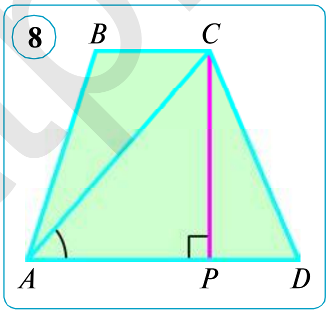
11. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $AD = 20\sqrt{2}$ cm, $BC = 10\sqrt{2}$ cm, $AC = 24$ cm, $\angle CAD = 45°$ (рис. 8).

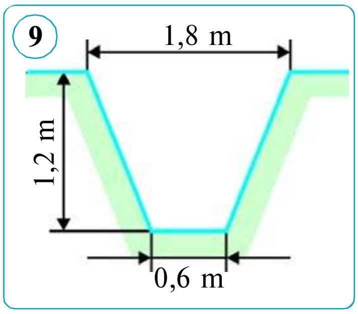
12. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны:
1) 3,5 dm и 1,4 dm; 2) 28 cm и 17 cm; 3) 4,2 cm и 1,5 dm.

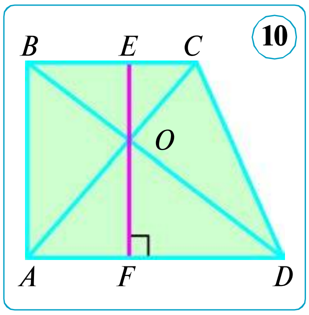
13. Высота равнобедренной трапеции равна 5 cm, а диагонали перпендикулярны. Найдите площадь трапеции.

14. Вычислите площадь поперечного сечения рва в виде равнобедренной трапеции (рис. 9).

15. Основания трапеции 16 cm и 12 cm. Расстояние от точки пересечения диагоналей до оснований равны 6 cm и 4 cm (рис. 10). Найдите площадь этой трапеции.

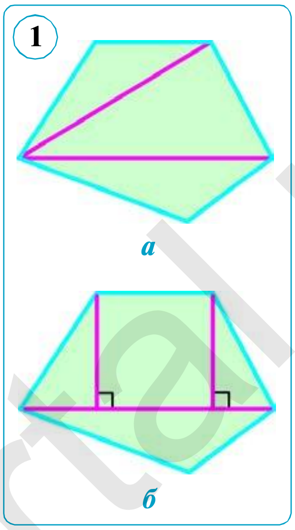






51. ПЛОЩАДЬ МНОГОУГОЛЬНИКА

Для вычисления площади произвольного многоугольника чаще всего его разбивают на неперекрывающиеся треугольники и находят сумму площадей этих треугольников. Для того чтобы выпуклый многоугольник разбить на треугольники, достаточно провести все диагонали из любой одной вершины (рис. 1, *а*). Иногда удобнее пользоваться и другими способами разбиения (рис. 1, *б*).



Задача 1. Известно, что в многоугольнике $ABCDE$ $BD \parallel AE$, $CP \perp AE$ (рис. 2).

Докажите, что $S_{ABCDE} = 0{,}5(BD \cdot CP + AE \cdot OP)$.

Доказательство. Из рисунка видно, что многоугольник состоит из треугольника и трапеции. Поэтому, по 2-му свойству площади:

$$S_{ABCDE} = S_{BCD} + S_{ABDE} = 0{,}5BD \cdot CO + 0{,}5(AE + BD) \cdot OP =$$
$$= 0{,}5(\underline{BD} \cdot \underline{CO} + AE \cdot OP + \underline{BD} \cdot \underline{OP}) = 0{,}5(BD \cdot (CO + OP) +$$
$$+ AE \cdot OP) = 0{,}5(BD \cdot CP + AE \cdot OP).$$

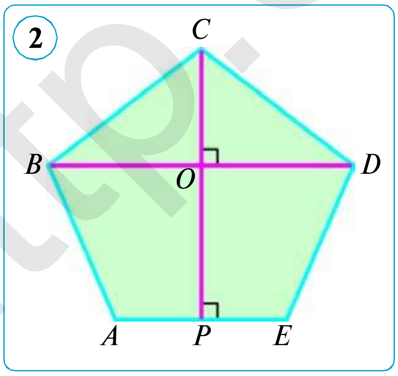
Значит, $S_{ABCDE} = 0{,}5(BD \cdot CP + AE \cdot OP)$.

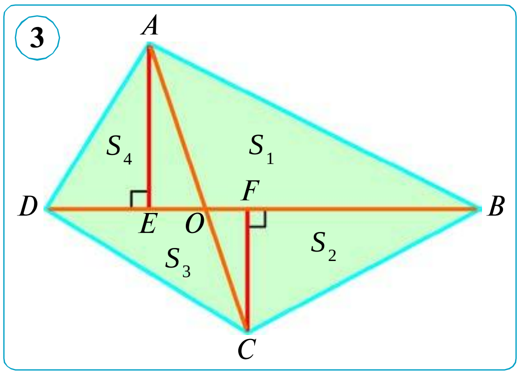
Задача 2. AC и BD – диагонали четырехугольника $ABCD$, O – их точка пересечения (рис. 3). Докажите, что если $S_{AOB} = S_1$, $S_{BOC} = S_2$, $S_{COD} = S_3$ и $S_{AOD} = S_4$, то $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.

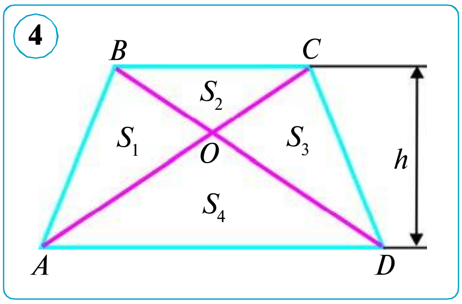
Доказательство. 1) Проведем $AE \perp BD$ и $CF \perp BD$.

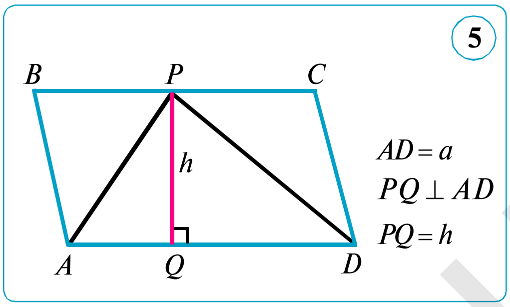
2) $\dfrac{S_1}{S_4} = \dfrac{0{,}5OB \cdot AE}{0{,}5OD \cdot AE} = \dfrac{OB}{OD}$ (1) и $\dfrac{S_2}{S_3} = \dfrac{0{,}5OB \cdot CF}{0{,}5OD \cdot CF} = \dfrac{OB}{OD}$ (2).

3) Из (1) и (2) имеем: $\dfrac{S_1}{S_4} = \dfrac{S_2}{S_3} \Rightarrow S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.









Задача 3. BC и AD – основания трапеции $ABCD$, O – точка пересечения диагоналей AC и BD (рис. 4). $AD = a$, $BC = b$.

Докажите, что если $S_{AOB} = S_1$, $S_{BOC} = S_2$, $S_{COD} = S_3$ и $S_{AOD} = S_4$, то:

1) $S_1 = S_3 = \sqrt{S_2 \cdot S_4}$; 2) $S_{\text{тр.}} = \left(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4}\right)^2$.

Решение. 1) $S_{ABC} = S_{DBC} = \frac{1}{2}bh \Rightarrow S_1 + \underline{S_2} = S_3 + \underline{S_2} \Rightarrow S_1 = S_3$.

2) Нам известно, что $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$. Учитывая, что $S_1 = S_3$, то получим $S_1 = S_3 = = \sqrt{S_2 \cdot S_4}$. Первая часть утверждения доказана.

3) По 2-ому свойству площади, и учитывая полученные формулы, имеем:

$$S_{\text{тр.}} = \underline{S_1} + S_2 + \underline{S_3} + S_4 = S_2 + 2S_1 + S_4 =$$
$$= \left(\sqrt{S_2}\right)^2 + 2\sqrt{S_2 \cdot S_4} + \left(\sqrt{S_4}\right)^2 = \left(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4}\right)^2.$$

Итак, $S_{\text{тр.}} = \left(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4}\right)^2$. Вторая часть утверждения доказана.

Задача 4. Площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, в котором основание и высота общие с треугольником.

Решение. Основание AD и высота h – общая для параллелограмма $ABCD$ и треугольника APD (рис. 5). Докажем, что $S_{APD} = 0{,}5S_{ABCD}$.

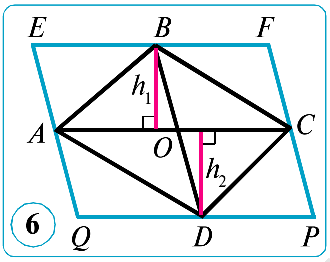
Известно, что $S_{ABCD} = ah$ (1) и $S_{APD} = 0{,}5ah$ (2). В (2) вместо ah подставим S_{ABCD}, и находим: $S_{APD} = 0{,}5ah = 0{,}5S_{ABCD}$.

Примечание! Выше приведенную задачу можно сформулировать и так:

– *площадь параллелограмма в два раза больше площади треугольника, у которого основание и высота общие с параллелограммом.*

Задача 5. Докажите, что если через вершины четырехугольника провести прямые, параллельные его диагоналям, то площадь параллелограмма, образованного этими прямыми, в два раза больше площади данного четырехугольника.

Решение. Пусть $ABCD$ – данный четырехугольник, O – точка пересечения диагоналей AC и BD, h_1 и h_2 – перпендикуляры опущенные из вершин B и D к диагонали AC; $EFPQ$ параллелограмм – образованный при пересечении параллельных прямых, проведенных через вершины четырехугольника, параллельно его диагоналям (рис. 240).



Докажем, что $S_{EFPQ} = 2S_{ABCD}$.

По построению, стороны параллелограмма EF и QP параллельны диагонали AC и равны. Поэтому, диагональ AC делит получившийся параллелограмм $EFPQ$ на два параллелограмма $AEFC$ и $ACPQ$. Учитывая выше изложенное заключение в примечании, докажем равенство $S_{EFPQ} = 2S_{ABCD}$:

$S_{EFPQ} = S_{AEFC} + S_{ACPQ} = 2S_{ABC} + \quad 2S_{ADC} = 2(S_{ABCC} + S_{ADC}) = 2S_{ABCD}$.

Итак, $S_{EFPQ} = 2S_{ABCD}$.

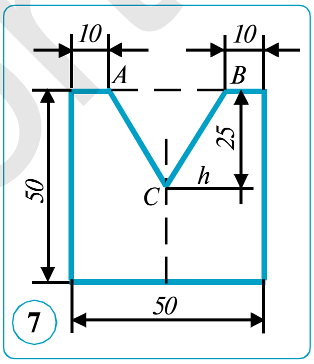
Вопросы, задачи и задания

1. Найдите площадь фигуры на рисунке 7.

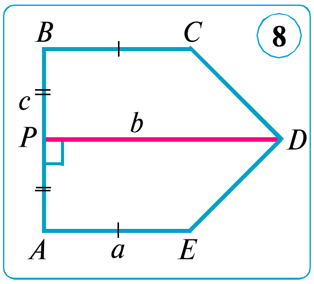
Решение. Площадь фигуры, изображенной на рис. 7, удобно найти, если дополнить ее до квадрата, соединив точки A и B. Площадь фигуры равна разности площадей квадрата и треугольника ABC:

$S = S_{\text{кв.}} - S_{ABC} = ...^2 - 0{,}5 \cdot (50 - 2 \cdot 10) \cdot ... =$
$= ... - 375 = ...$ (кв. ед.).

Заполните пропуски. *Ответ:* ... кв. ед.



2. Выведите формулу вычисления площади фигуры изображенной на рисунке 8. Здесь $AE \parallel BC \parallel PD$, $AE = BC$, $AP = PB$, $PD \perp AB$.

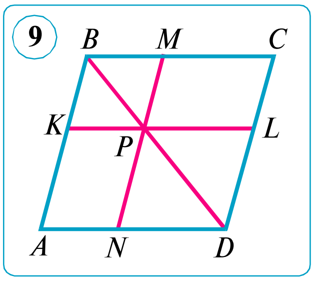


3. *Дано:* $ABCD$ – прямоугольник, $AB = 12$ cm, $AD = 16$ cm; точки E, F, P и Q – середины соответствующих сторон.

Требуется найти: S_{EFCPQA}.

4. *Дано:* $ABCD$ – параллелограмм, $P \in BD$, $KL \parallel BC$, $MN \parallel AB$ (рис. 9).

Требуется доказать: $S_{AKPN} = S_{PMCL}$.



5. AC и BD – диагонали четырехугольника $ABCD$, O – точка пересеченя его диагоналей. Найдите S_{COD}, если $S_{AOD} = 12$, $S_{BOC} = 8$, $S_{AOB} = 6$.

6. Площадь земельного участка в форме прямоугольника равна 400 ha. Чему равен периметр этого участка, если:

1) длина участка равна 10 km;

2) участок имеет форму квадрата?

52. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ

I. Задачи для исследованя.

Задача 1. Рассмотрим задачу. Стороны прямоугольника натуральные числа и периметр кратен 4.

Периметр прямоугольника равен 72 cm и стороны выражены натуральными числами. Найдите среди них прямоугольник с наибольшей площадью. Какая эта фигура? Сделайте вывод.

Решенеие. В прямоугольнике: $P = 2 \cdot (a + b) = 72$ cm – периметр, $p = a + b = 36$ cm – полупериметр, т.е. сумма смежных сторон. Если значения a и b будут известны, то тогда можем вычислить $S = a \cdot b$. Чтобы ответить на вопрос задачи, надо найти значение смежных сторон прямоугольника.

Для этого представим 36 в виде суммы двух натуральных чисел:

$$a + b = 36 = 1 + 35 = 2 + 34 = 3 + 33 = \ldots = 33 + 3 = 34 + 2 = 35 + 1.$$

Отсюда видно, что существует 35 разных прямоугольников, сумма смежных сторон равна 36 sm. Введем данные в таблицу, сделаем анализ и соответствующие выводы:

a cm	**1**	2	...	**17**	**18**	**19**	20	...	**34**	**35**
b cm	**35**	34	...	**19**	**18**	**17**	16	...	**2**	**1**
$(a + b)$ cm	**36**	**36**		**36**	**36**	**36**	**36**	...	**36**	**36**
$S = a \cdot b$ cm^2	**35**	68	...	**323**	**324**	**323**	320	...	**68**	**35**

Из таблицы видно, что наименьшая площадь достигается при $a = 1$ cm и $b = 35$ cm или $a = 35$ cm и $b = 1$ cm, а наибольшая площадь при $a = b = 18$ cm, т.е. когда сторона квадрата равна 18 cm. В остальных прямоугольниках периметр равен 72 cm, но площади их будут меньше

$$18 \cdot 18 = 324 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

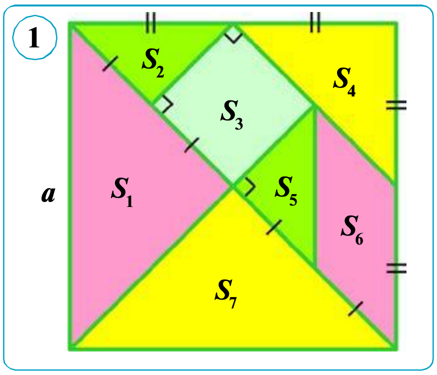
После анализа таблицы, сделаем следующие выводы.

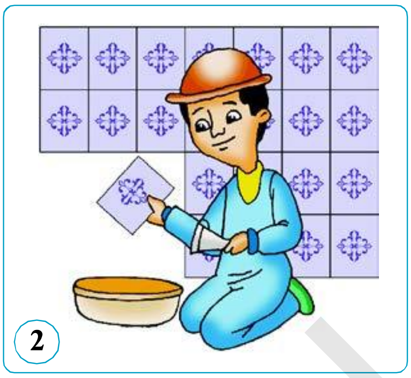
Вывод 1. Если стороны прямоугольника натуральные числа и периметр кратен 4, то наибольшая площадь вычисляется по формуле:

$$S_{\max} = \left(\frac{P}{4}\right)^2 \text{ кв. ед.}$$

Вывод 2. Если стороны прямоугольника натуральные числа и периметр кратен 2, то тогда среди прямоугольников с равными периметрами наименьшую площадь имеет тот прямоугольник, в котором одна сторона равна 1, а вторая дополнение 1 (единицы) до числового значения полупериметра: $a = 1$, $b = p - 1$.

Вывод 3. Если длины смежных сторон прямоугольника сближаются, то площадь увеличивается.





Задача 2. Китайская игра «тангрем» – это квадрат, разрезанный на треугольники и четырехугольники так, как показано на рис. 1. Из них составляют разные фигурки. Найдите их площади, если сторона квадрата равна 8 cm.

Решение. $a = 8$ cm – сторона квадрата. $S = a^2 = 8^2 = 64$ (cm²) – площадь данного квадрата. Теперь находим площади фигурок.

1) Площади S_1 и S_7 – равны одной четвертой площади квадрата. Значит, $S_1 = S_7 = S : 4 = 64 : 4 = 16$ (cm²).

2) Площадь равнобедренного прямоугольного треугольника равна одной четвертой квадрата половины гипотенузы. Значит,

$$S_2 = S_5 = 0{,}25 \cdot (a : 2)^2 = 0{,}25 \cdot 4^2 = 0{,}25 \cdot 16 = 4 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

3) Площадь квадрата S_3 равна удвоенной площади S_2. Значит, $S_3 = 2S_2 = 2 \cdot 4 = 8$ (cm²).

4) Катеты треугольника S_4 равны половине стороны данного квадрата, т.е. $a : 2 = 8 : 2 = 4$ (cm). Площадь равнобедренного треугольника равна половине квадрата стороны, т.е. $S_4 = 0{,}5 \cdot 4^2 = 0{,}5 \cdot 16 = 8$ (cm²).

5) Квадрат и параллелограмм с одинаковыми основаниями и высотой равновелики, поэтому $S_6 = S_3 = 2 \cdot 4 = 8$ (cm²).

Ответ: $S_1 = S_7 = 16$ cm²; $S_2 = S_5 = 4$ cm²; $S_3 = S_4 = S_6 = 8$ cm².

Задача 4. Часть стены, имеющей форму прямоугольника со сторонами 2,25 m и 1,8 m, необходимо покрыть кафелем. Сколько плиток для этого понадобится, если плитка имеет форму квадрата со стороной 15 cm (рис. 2)?

Решение. 1) Находим площадь части стены, которую необходимо покрыть кафелем и выразим в квадратных сантиметрах:

$$2{,}25 \cdot 1{,}8 = 4{,}05 \text{ (m}^2\text{)} = 4{,}05 \cdot 10\,000 \text{ cm}^2 = 40500 \text{ cm}^2.$$

2) Находим площадь одного кафеля: $a^2 = 15^2 = 225$ (cm²).

3) Находим, сколько плиток понадобится для покрытия части стены в форме прямоугольника: 40500 : 225 = 180 (штук).

Ответ: необходимо 180 штук кафеля.

Следующую задачу решите самостоятельно.

Задача 4. Сколько потребуется кафельных плиток квадратной формы со стороной 20 cm, чтобы облицовать дорожку имеющую форму квадрата со стороной 4 m?

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ, РАЗВИВАЮЩИЙ ПРАКТИЧЕСКИЕ КОМПЕНТЕНЦИИ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКА, НАРИСОВАННОГО НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ

Приведем «**Формулу Пика**» – формулу вычисления площади выпуклого и невыпуклого многоугольника, нарисованного на клетчатой бумаге. Стороны каждой клеточки равны 1 cm. Назовем точки пересечения прямых на клетчатой бумаге **узловыми точками**. Тогда площадь многоугольника вычисляется по следующей формуле:

$$S = \frac{M}{2} + N - 1 .$$

В этой формуле M – число узловых точек, лежащих вдоль границы многоугольника, N – число узловых точек внутри многоугольника.

Эту формулу можно применять в любом многоугольнике, вершины которого находятся в узловых точках. .

Задача 1. Вычислите площадь фигуры на рисунке 1.

Решение. Способ 1. 1) Число полных квадратиков равно 59, площадь их равна 59 cm^2; число треугольников равных половине квадрата 16, их площадь равна $16 : 2 = 8$ (cm^2); имеется треугольник, в котором основание равно 2 cm, а высота равна 3 cm, а площадь его равна 3 cm^2.

Таким образом, площадь данного многоугольника равна:

$$S = 59 + 8 + 3 = 71 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Способ 2. Отметим узловые точки.

1) Подсчитаем число узловых точек внутри фигуры (отмечены черным цветом): их 50, т.е. $N = 50$.

2) Подсчитаем число узловых точек вдоль периметра фигуры (отмечены красным цветом): их 44, т.е. $M = 44$. Используем формулу Пика:

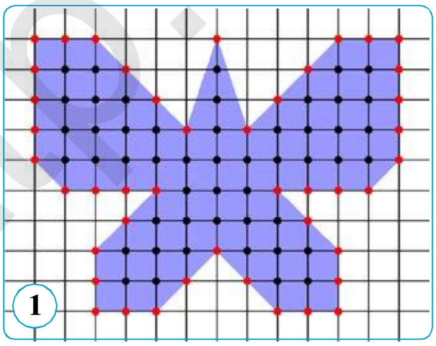
$$S = \frac{44}{2} + 50 - 1 = 22 + 49 = 71 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

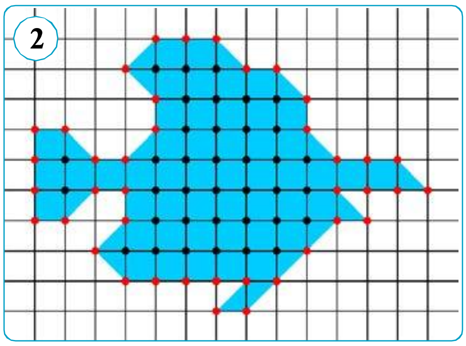
Таким образом, в обоих случаях получили одинаковый ответ.

Ответ: 71 cm^2.

Задача 2. Вычислите площадь многоугольника на рисунке 2.

Решение. 1) Подсчитаем число узловых точек вдоль периметра многоугольника (отмечены красным цветом): их 40, т.е. $M = 40$.



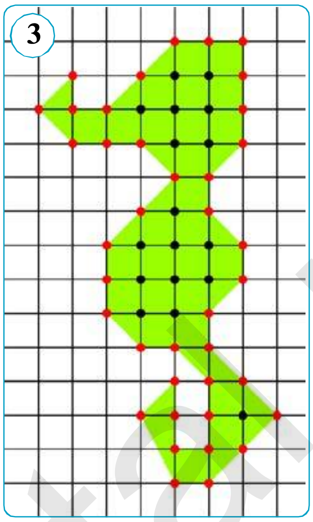


2) Подсчитаем число узловых точек внутри многоугольника (отмечены черным цветом): их 37, т.е. $N = 37$.

По формуле Пика, имеем:

$$S = \frac{40}{2} + 37 - 1 = 20 + 36 = 56 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Ответ: 56 cm^2.



Задача 3. Вычислите площадь многоугольника на рисунке 3.

Решение. Способ 1. 1) Подсчитаем число узловых точек вдоль сторон многоугольника (отмечены красным цветом): их 39, т.е. $M = 39$.

2) Подсчитаем число узловых точек внутри многоугольника (отмечены черным цветом): их 17, т.е. $N = 17$.

По формуле Пика, имеем:

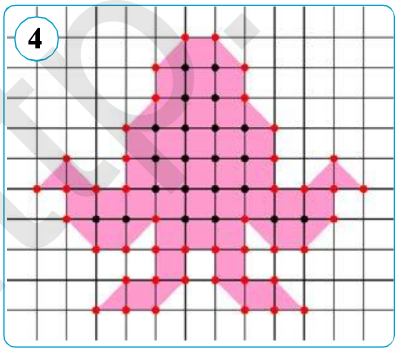
$$S = \frac{39}{2} + 17 - 1 = 19,5 + 16 = 35,5 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

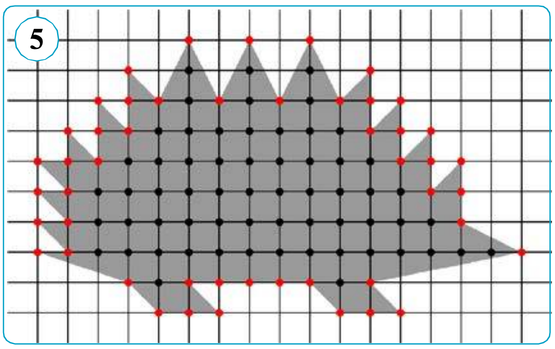
Способ 2. Чтобы убедиться в правильности полученного ответа, вы можете воспользоваться более удобными для вас разбиениями данного многоугольника. После этого, вычислите площади полученных выпуклых многоугольников по известным формулам. А потом суммируете полученные результаты, и сопоставьте с результатом 1-го способа. Если вычисление выполните правильно, то тогда в обоих случаях получите одинаковый ответ. Способ вычисления площади выбираете сами. Вычисление можно провести устно.

Число полных квадратиков равно 26, площадь их равна 26 cm^2; число треугольников равных половине квадрата 17, их площадь равна $17 : 2 = 8,5$ (cm^2); имеется треугольник, у которого основание равно 2 cm, а высота равна 1 cm, а площадь его равна 1 cm^2. Таким образом, площадь данного многоугольника: $26 + 8,5 + 1 = 35,5$ (cm^2).

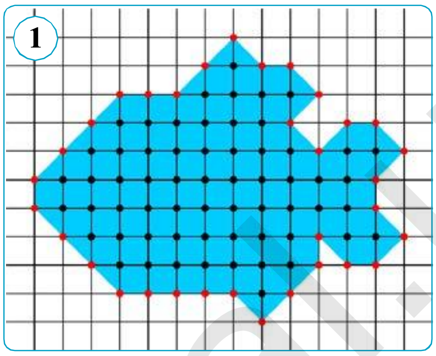
Значит, оба результата одинаковы. *Ответ:* 35,5 cm^2.

Задача 4. Вычислите площади многоугольников на рис. 4 и 5, применив формулу Пика.





53–54. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 4. РАБОТА НАД ОШИБКАМИ



1. Найдите площадь квадрата, периметр которого равен периметру прямоугольника со сторонами 27 cm и 21 cm.
2. Найдите периметр прямоугольника. если его площадь 540 cm^2, а смежные стороны относятся как 3 : 5.
3. Площадь параллелограмма равна 24 cm^2, а высоты равны 3 cm и 4 cm. Найдите периметр этого параллелограмма.
4. Найдите площадь фигуры, изображенной на рис. 1, с разбиением на многоугольники и используя формулу Пика.

ТЕСТ 4. Проверьте себя!

1. Во сколько раз увеличится площадь треугольника, если его стороны увеличить в 4 раза?
   А) 4; Б) 8; В) 16; Г) 32.
2. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 400 ha, а отношение смежных сторон равно 4 : 1.
   А) 10 km; Б) 5 km; В) 2 km; Г) 8 km.
3. Длина прямоугольника увеличена на 25 %. На сколько процентов надо уменьшить ширину, чтобы его площадь не изменилась?
   А) 20 %; Б) 16 %; В) 25 %; Г) 18 %.
4. Во сколько раз надо уменьшить сторону квадрата, чтобы его площадь уменьшилась в 4 раза?
   А) 1,5 раза; Б) 2 раза; В) 3 раза; Г) 3,5 раза.
5. Найдите периметр параллелограмма, если его площадь 144 cm^2, высоты 8 cm и 12 cm.
   А) 40 cm; Б) 30 cm; В) 80 cm; Г) 60 cm.
6. В параллелограмме $ABCD$ на диагональ AC опущен перпендикуляр BO. Найдите площадь паралллелограмма, если $AO = 8$ cm, $OC = 6$ cm и $BO = 4$ cm.
   А) 50 cm^2; Б) 28 cm^2; В) 52 cm^2; Г) 56 cm^2.
7. Площадь ромба равна 40 cm^2, а его периметр равен 20 cm. Найдите высоту этого ромба.
   А) 2 cm; Б) 8 cm; В) 4 cm; Г) 16 cm.
8. Основания трапеции равны 5 cm и 9 cm. Найдите высоту трапеции, если ее площадь равна 35 cm^2.
   А) 9 cm; Б) 8 cm; В) 5 cm; Г) 10 cm.

9. Найдите площадь равнобедренной трапеции, в которой основания равны 8 и 12, а диагонали взаимно перпендикулярны.

А) 100; Б) 64; В) 144; Г) 76.

10. Высота трапеции равна 6 cm, а площадь 30 cm². Чему равна ее средняя линия?

А) 2,5 cm; Б) 5 cm; В) 7,5 cm; Г) 4,5 cm.

Изучаем английский язык!

Квадратный корень – square root
Треугольник – triangle
Средняя линия – midline
Формула Герона – formula of Heron
Площадь – area

Исторические сведения

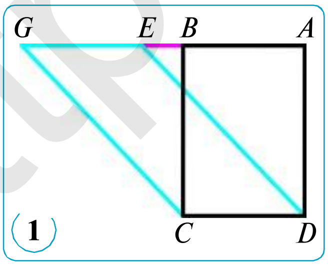
Авиценна
(980–1037)

Пятая глава «Книга знаний» Авиценны посвящена основным геометрическим задачам, относящимся к четырехугольникам, размещенным в них треугольникам и связям между ними.

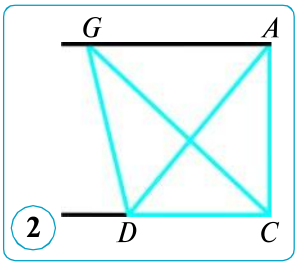
Теорема 1. **Фигуры, размещенные между двумя параллельными прямыми, имеющие равные основания и взаимно параллельные противолежащие стороны, равновелики (т.е. равны их площади).** Например, плоские фигуры $ABCD$ и $EGCD$ с основанием CD равновелики (рис. 1).

Теорема 2. **Треугольники, размещенные между двумя параллельными прямыми и имеющие равные основания, равновелики.** Например, треугольники ACD и GCD с общим основанием CD равновелики (рис. 2).

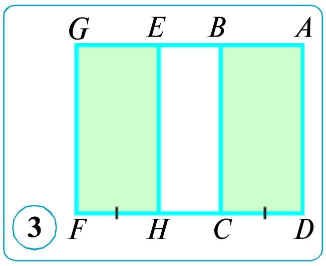
Теорема 3. **Четырехугольники, размещенные между двумя параллельными прямыми и имеющие равные основания, равновелики.** Например, четырехугольники $ABCD$ и $GEHF$ (рис. 3).



1



2



3

ГЛАВА V
ОКРУЖНОСТЬ

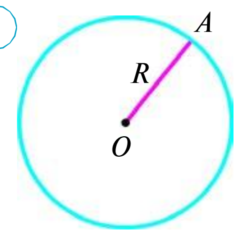
§ 10. УГЛЫ В ОКРУЖНОСТИ

55. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ. КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ И ЕЕ СВОЙСТВА

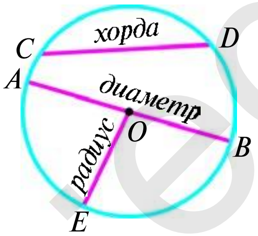
1. Начальные сведения об окружности.

Определение. ***Окружностью*** *называется геометрическая фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки*

1



Окружность (O, R) с центром O и радиусом R **а**



CD – хорда, OE – радиус, AB – диаметр
б

Данная точка O называется ***центром окружности***, а данное рассстояние – ***радиусом окружности***. Иначе говоря, *радиусом* окружности называется расстояние от центра окружности до любой ее точки.

Таким образом, окружность с центром в точке O и радиусом R представляет собой геометрическую фигуру, состоящую из всех точек плоскости, расстояние от которых до точки O равно R.

Обычно, окружность с центром O и радиусом R обозначают так: (O, R) (рис. 1, *а*).

Отрезок, соединяющий произвольные две точки окружности, называется ***хордой***. Хорда, проходящая через центр, называется ***диаметром***.

На рис. 1, *б* изображены две хорды окружности, одна из которых является ее диаметром: OE – радиус, CD – хорда, AB – диаметр.

Обычно диаметр обозначают буквой d. Очевидно, что диаметр вдвое больше радиуса, то есть $d = 2R$.

2. Взаимное расположение прямой и окружности.

Рассмотрим случаи взаимного расположения прямой и окружности. Ясно, что если прямая проходит через центр окружности, то она пересекает окружность в двух точках – концах диаметра, лежащего на этой прямой. Для того, чтобы ответить на вопрос, сколько общих точек имеют прямая l и окружность (O, R), нужно сравнить радиус R с расстоянием d от точки O до прямой l.

Напомним, что расстоянием от точки до прямой называется *длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.*

Рассмотрим три случая: 1) $d > R$; 2) $d = R$; 3) $d < R$.

Случай 1. *Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса окружности, то прямая и окружность не имеют общих точек.*

Действительно, если $d > R$ (рис. 2, *а*), то в этом случае $OA > R$, для любой другой точки B прямой l OB будет больше перпендикуляра OA и, следовательно, больше R. Значит, прямая l и окружность не имеют общих точек.

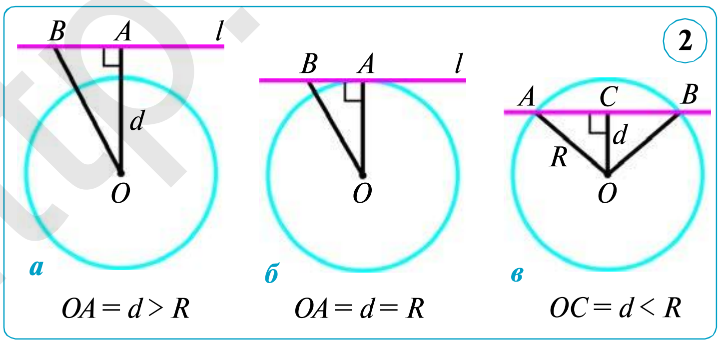
Случай 2. *Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу окружности, то эта прямая и окружность имеют только одну общую точку.*

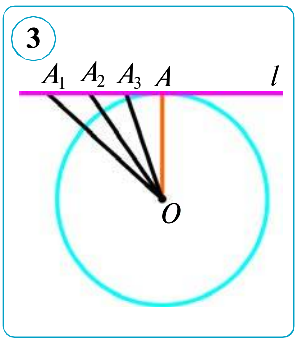
Действительно, если $d = R$ (рис. 2, *б*), то точка A прямой l, по условию находящаяся от центра окружности O на расстоянии, равному радиусу, принадлежит окружности, любая другая точка этой прямой удалена от центра окружности на расстояние, больше радиуса, следовательно, к окружности не принадлежит. Значит, прямая l и окружность имеют одну общую точку A.

Случай 3. *Если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса окружности* ($d < R$), *то прямая и окружность пересекаются, то есть имеют две общие точки.*

Часть прямой, находящаяся внутри окужности, представляет хорду окружности (рис. 2, *в*). В этом случае прямая l называется *секущей* по отношению к окружности. Длину хорды AB можно вычислить через радиус окружности и расстояние от центра окружности до прямой по формуле: $AB = 2\sqrt{R^2 - d^2}$.

Докажите это равенство самостоятельно.





Вывод. *Окружность и прямая могут не иметь общих точек, иметь одну или две общие точки.*

2. Касательная к окружности.

Определение. *Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется* ***касательной*** *к этой окружности, а их общая точка называется* ***точкой касания*** *прямой и окружности.*

На рис. 2, *б* прямая l — касательная к окружности с центром O, A — точка касания. Можно сказать, что окружность касается прямой l.

Докажем теорему о свойстве касательной.

Теорема 1.

Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному к точке касания.

Доказательство. Пусть l — касательная к окружности с центром O, A — точка касания (см. рис 3). Докажем, что касательная l перпендикулярна к радиусу $R = OA$. Из условия теоремы следует, что для любой другой точки A_1 на прямой l наклонная OA_1 будет больше перпендикуляра OA и, следовательно, больше R. Таким образом, расстояние от любой точки прямой l, отличной от A, до центра O больше R, т.е. $OA_1 > OA$. Значит, OA — кратчайшее расстояние от точки O до прямой l. Следовательно, $OA \perp l$. Теорема доказана.

Докажем теорему, обратную предыдущей (признак касательной).

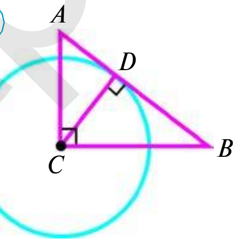
Теорема 2.

Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна этому радиусу, то она является касательной.

Доказательство. Если расстояние от центра окружности O до прямой l равно радиусу R окружности ($d = OA = R$) (см. рис. 2, *б*), то точка A лежит на окружности и, значит, она является общей точкой прямой и окружности. Любая точка (B) прямой l, отличная от точки A, лежит вне окружности, так как длина отрезка (OB) больше длины радиуса OA, и поэтому не лежит на данной окружности. $OA \perp l$ по условию. По определению, прямая l является касательной к окружности. Теорема доказана.

Задача. Катеты прямоугольного треугольника ACB ($\angle C = 90°$) равны $AC = 3$ cm и $BC = 4$ cm. Проведена окружность (C; R), $R = 2{,}4$ cm Каково взаимное расположение прямой AB и этой окружности?

4



Решение. В $\triangle ACB$ ($\angle C = 90°$): $AC = 3$ cm, $BC = 4$ cm. По теореме Пифагора:

$$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ (cm)}.$$

Проводим $CD \perp AB$ (рис. 4). Можно вычислить площадь треугольника двумя способами, т.е. верно равенство: $CA \cdot CB = AB \cdot CD$. Отсюда $CD = CA \cdot CB : AB = 3 \cdot 4 : 5 = 2,4$ (cm). Следовательно, прямая AB касается окружности, так как расстояние от точки C до прямой AB равно радиусу.

Ответ: AB – касательная.

Вопросы, задачи и задания

1. 1) Какая фигура называется окружностью? Что называется: а) центром окружности; б) радиусом окружности?

2) Что называется: а) хордой; б) диаметром окружности?

3) Какая прямая называется касательной к окружности?

4) Какое свойство и признак касательной вы знаете?

2. Пусть d – расстояние от центра окружности с радиусом R до прямой l. Каково взаимное расположение прямой l и окружности. если: 1) $R = 8$ cm, $d = 6$ cm; 2) $R = 10$ cm, $d = 8,4$ cm; 3) $R = 14,4$ dm, $d = 7,4$ dm; 4) $R = 1,6$ dm, $d = 24$ cm; 5) $R = 4$ cm, $d = 40$ mm?

3. Даны квадрат $ABCD$, сторона которого равна 8 cm, и окружность с центром в точке A радиуса 7 cm. Какие из прямых AB, BC, CD и BD являются секущими по отношению к этой окружности?

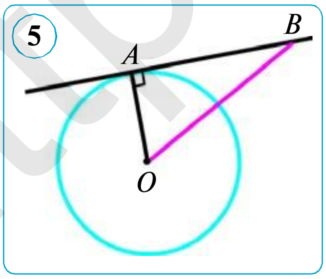
4. Прямая AB касается окружности с центром O радиуса R. Найдите OB, если $AB = 24$ cm, а радиус окружности равен 7 cm (рис. 5).

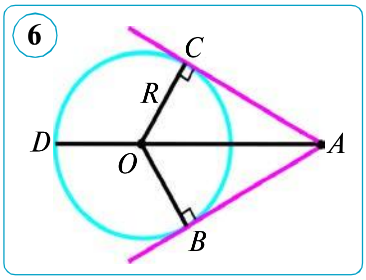
5. В прямоугольном треугольнике ACB ($\angle C = 90°$) $AB = 10$ cm, $\angle ABC = 30°$. Проведена окружность с центром в точке A. Каким будет ее радиус, если: 1) прямая BC касается окружности; 2) не имеет с BC общих точек; 3) имеет с прямой BC две общие точки?

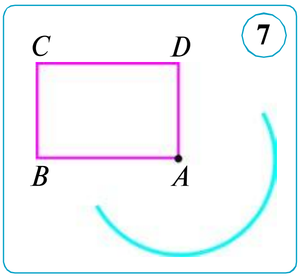
6. Если провести две касательные к окружности из точки вне ее, то отрезки касательных, заключенных между этой точкой и точками касания равны. Докажите это (рис. 6).

7. Каково взаимное расположение прямой и окружности, если радиус окружности равен 5 cm, а расстояние от центра окружности до прямой равно: 1) 6 cm; 2) 5 cm; 3) 4 cm?

8. Дан прямоугольник $ABCD$, где $AB = 16$ cm, $AD = 12$ cm (рис. 7). Какая из прямых AC, BC, CD и BD является касательной к окружности с центром A и радиусом 12 cm?

5


6


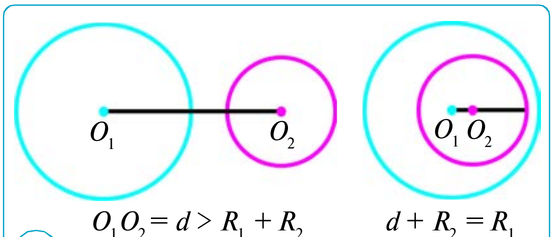
7


56. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ. ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УГОЛ И ГРАДУСНАЯ МЕРА ДУГИ ОКРУЖНОСТИ

1. Взаимное расположение двух окружностей.

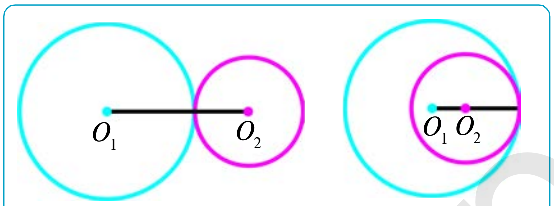
Рассмотрим случаи взаимного расположения двух окружностей.

1) Две окружности могут не иметь общих точек (рис. 1). При этом они находятся вне друг друга (рис. 1, *а*) или одна внутри другой (рис. 1, *б*).



1 $O_1O_2 = d > R_1 + R_2$ **а** $d + R_2 = R_1$ **б**

2) Две окружности могут иметь одну общую точку (рис.2). В этом случае говорят, что окружности *касаются*. Причем окружности могут касаться *внешним* образом (рис. 2, *а*) или внутренним образом (рис. 2, *б*).



2 $O_1O_2 = d = R_1 + R_2$ **а** $d = R_1 - R_2$ **б**

3) Две окружности могут иметь две общие точки (рис. 3). В этом случае говорят, что окружности *пересекаются*.

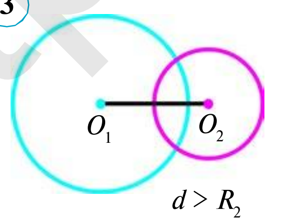
Окружности, имеющие общий центр, называются *концентрическими* (рис. 4).

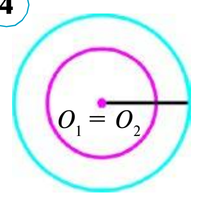
Взаимное расположение двух окружностей зависит от их радиусов и расстояния между центрами.

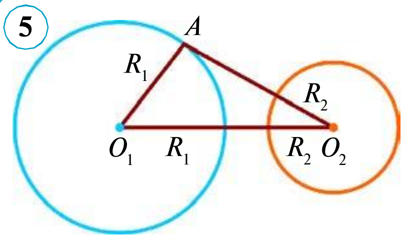
Теорема.

Если расстояние между центрами двух окружностей больше суммы их радиусов или меньше их разности, то эти окружности не имеют общих точек.

Доказательство. Пусть даны две окружности с центрами в точках O_1, O_2 и радиусами соответственно R_1, R_2 ($d = R_1 + R_2 < O_1O_2$) (рис. 5). Рассмотрим точку A на первой окружности, $O_1A = R_1$. Тогда $O_2A \geq O_1O_2 - O_1A > R_1 + R_2 - R_1 = R_2$, и, следовательно, точка A не принадлежит второй окружности. Значит, эти окружности не имеют общих точек.

3


4


5


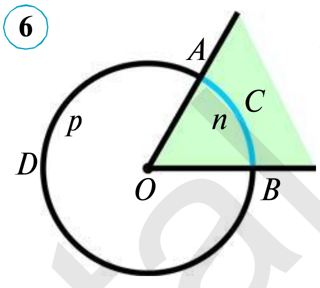
Самостоятельно рассмотреть случаи, когда две окружности имеют: а) одну общую точку; б) две общие точки.

2. Центральный угол.

Определение. *Угол с вершиной в центре окружности называется ее* ***центральным углом****.*

Лучи OA и OB, исходящие из центра окружности O, определяют два центральных угла, один из которых ограничивает выпуклую область. Точки A и B разбивают окружность на две дуги. Чтобы различить эти дуги, на каждой из них отмечают промежуточную точку, отличную от концов, или добавляют в обозначение дуги строчую букву латинского алфавита, например, называют *дуга* ACB (или AnB) и *дуга* ADB (или ApB) (рис. 6). Эти дуги обозначают так: $\cup ACB$ (или $\cup AnB$) и $\cup ADB$ (или $\cup ApB$). Иногда используется обозначение без промежуточной точки: $\cup AB$ (когда ясно, о какой из двух дуг идет речь).

6



$\angle AOB$ – центральный угол

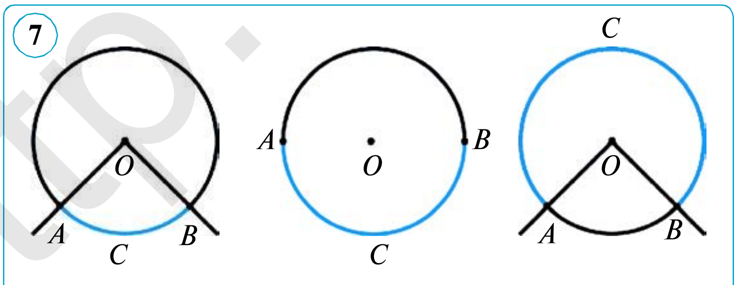
Дуга называется *полуокружностью*, если отрезок, соединяющий ее концы, является диаметром окружности. На рисунке 7, *б* изображены две полуокружности, одна из которых выделена жирной линией.

3. Градусная мера дуги.

Определение. ***Угловой величиной дуги окружности*** *называется угловая величина соответствующего ей центрального угла этой окружности.*

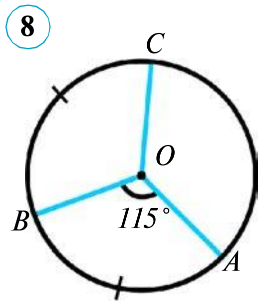
Дугу окружности можно измерять в градусах. *Если дуга ACB окружности с центром O меньше полуокружности или является полуокружностью, то ее градусная мера считается равной градусной мере центрального угла AOB* (рис. 7, *а, б*). *Если же дуга ACB больше полуокружности, то ее градусная мера считается равной* $360° - \angle AOB$ (рис.7, *в*).

7



$\cup ACB = \cup AOB$ *а)* $\cup ACB = 180°$ *б)* $\cup ACB = 360° - \angle AOB$ *в)*

8



Отсюда следует, что *сумма градусных мер двух дуг окружности с общими концами равна* $360°$. По определению, ***два плоских угла равны*** только тогда, когда равны их угловые величины.

Задача. Точка O – центр окружности, $\angle AOB = 115°$, $\smile BC = \smile AB$ (рис. 8). Найдите градусную меру угла AOC.

Решение. Угол AOB является центральным углом окружности, а дуга AB меньше полуокружности, поэтому $\smile AB = \angle AOB = 115°$. По условию задачи $\smile BC = \smile AB$, и значит, градусная мера дуги BC равна $115°$. $\smile ABC = \smile AB + \smile BC = 230° > 180°$, т.е. дуга ABC больше полуокружности, поэтому $\angle AOC = 360° - \smile ABC = 360° - 230° = 130°$.

Ответ: $\angle AOC = 130°$.

Вопросы, задачи и задания

1. 1) В каком случае прямая касается окружности?
2) Какие окружности называются концентрическими?
3) Какой угол называется центральным углом окружности?
4) Как обозначается дуга окружности?
5) Что такое угловая величина дуги?

2. Расстояние между центрами двух окружностей равно 2 cm. Как расположены эти окружности по отношению друг к другу, если их радиусы равны: 1) 3 cm и 5 cm; 2) 2 cm и 5 cm?

3. Чему равно расстояние между центрами двух окружностей, радиусы которых равны 4 cm и 6 cm, если окружности: 1) касаются внешне; 2) касаются внутренне?

4. На сколько дуг и центральных углов разбивают данную окружность две прямые, проходящие через центр окружности?

5. Из одной точки окружности проведены две хорды, равные радиусу окружности. Найдите угол между ними.

6. Дуга, соответствующая центральному углу, составляет: 1) $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{4}{15}$; 3) $\frac{7}{12}$; 4) $\frac{5}{9}$; 5) $\frac{13}{18}$; 6) $\frac{17}{20}$; 7) $\frac{23}{30}$ части окружности. Найдите этот центральный угол.

7. Окружность разделена двумя точками на две дуги. Найдите их угловые величины, если: 1) угловая величина одной из них на $40°$ больше другой; 2) их угловые величины относятся как $2:7$.

8. Точки A, B, C лежат на окружности с центром O. Найдите угол AOC, если $\smile ABC = 70°$.

9. Найдите градусную меру центральных углов, соответствующих дуге AB, равной: 1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{9}$; 4) $\frac{1}{10}$; 5) $\frac{1}{12}$ части окружности. В каждом из этих случаев запишите угловую величину дуги AB.

10. Найдите диаметр окружности, если радиус окружности:
1) 7,8 cm; 2) 10,5 cm; 3) 0,8 dm.

57. УГОЛ, ВПИСАННЫЙ В ОКРУЖНОСТЬ

Определение. *Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется* ***вписанным углом****.*

На рис. 1 угол ABC вписанный, дуга AnC расположена внутри этого угла. В таком случае говорят, что *вписанный угол ABC опирается на дугу AnC.*

Теорема.

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается:

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC.$$

Доказательство. Пусть $\angle ABC$ – вписанный угол окружности с центром O, опирающийся на дугу AC (рис. 2). Рассмотрим три возможных случая расположения луча BO относительно угла ABC.

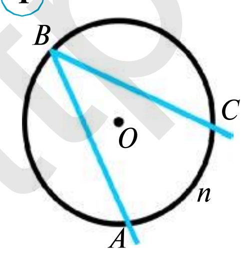
Случай 1. Одна из сторон вписанного угла, например BC, проходит через центр O окружности (рис. 2, *а*). Проведем радиус OA и рассмотрим центральный угол AOC. Угол AOC – внешний угол треугольника BOA. Поэтому $\angle AOC = \angle OBA + \angle OAB$ (по свойсту внешнего угла треугольника). Но $\angle OBA = \angle OAB$, так как треугольник AOB – равнобедренный ($OA = OB = R$). А поскольку углы OBA и OAB равны как углы при основании равнобедренного треугольника, то $\angle AOC = 2\angle ABC$ (1). Но угол AOC центральный, его величина равна угловой величине дуги AC, принадлежащий этому углу (тема 56). В этом случае дуга AC меньше полуокружности, следовательно, по свойству центрального угла:

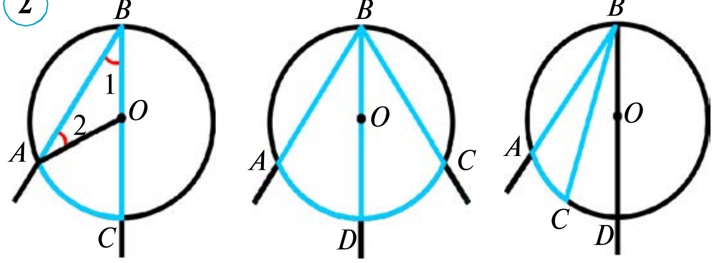
$$\angle AOC = \cup AC. \qquad (2).$$

Из равенств (1) и (2), имеем: $2\angle ABC = \cup AC$, т.е. $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

Для первого случая теорема доказана.

Случай 2. Центр окружности O лежит внутри вписанного угла ABC. Проведем луч BO, который пересекает дугу AC в некоторой точке D

1


2


а) б) в)

(рис. 2, *б*). Точка D разделяет дугу AC на две дуги: $\cup AD$ и $\cup DC$. По доказанному (случай 1): $\angle ABD = \frac{1}{2} \cup AD$ и $\angle DBC = \frac{1}{2} \cup DC$. Складывая эти равенства почленно, получаем:

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2} \cup AD + \frac{1}{2} \cup DC = \frac{1}{2}(\cup AD + \cup DC) = \frac{1}{2} \cup AC.$$

Случай 3. Центр окружности O лежит вне вписанного угла ABC. Для этого случая, пользуясь рис. 2, *в* , проведите доказательство самостоятельно.

Следствие 1. *Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны* (рис 3, *а*):

$$\angle B = \angle B_1 = \angle B_2 = \ldots = \frac{1}{2} \cup AC.$$

Следствие 2. *Вписанный угол, опирающийся на диаметр (полуокружность), — прямой* (рис. 3, *б*):

$$\angle B = \angle B_1 = \angle B_2 = \ldots = 90^\circ.$$

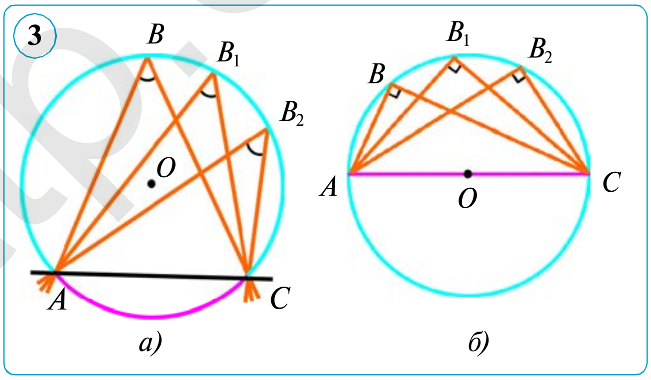
Задача. В окружности проведена хорда, равная радиусу. Под каким углом видна эта хорда из: 1) центра окружности; 2) произвольной точки окружности, отличной от концов данной хорды?

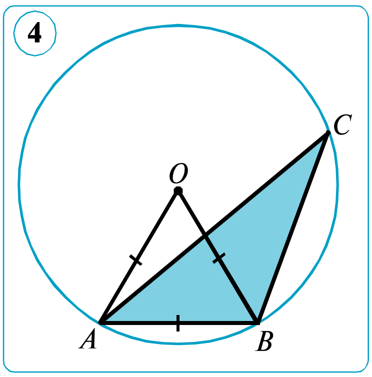
Решение. Пусть AB — хорда окружности с центром в точке O, равная радиусу (рис. 4). Тогда треугольник AOB — равносторонний, и, следовательно, центральный угол (угол, под которым видна хорда AB из центра окружности) равен 60°. Для прозвольной точки C окружности, отличной от A и B, вписанный угол ACB (угол, под которым видна хорда AB из точки C) равен половине центрального, т.е. равен 30°.

Ответ: 1) 60°; 2) 30°.

Вопросы, задачи и задания

1. 1) Какой угол называется вписанным углом в окружность?
2) Чем измеряется вписанный угол?
3) Чему равен вписанный угол, опирающийся на полуокружность?





2. (*Устно.*) Вписанный угол равен 25°. Определите величину дуги, на которую он опирается.

3. AB и BC − хорды окружности с центром O, $\angle ABC = 30°$. Найдите длину хорды AC, если радиус окружности 10 cm.

4. 1) На рисунке 5 точка O − центр окружности, $\angle AOB = 88°$. Найдите $\angle ACB$. Заполните пропуски.

Решение. Угол AOB является ... углом данной окружности и равен ...°, следовательно, $\cup ADB =$ ...°. Угол ACB является ... и опирается на дугу... , поэтому $\angle ACB = \frac{1}{2} \cup ... = ...°$.

Ответ: $\angle ACB = ...°$.

2) На рисунке 6 $\cup CAB = 130°$. Найдите $\angle CAB$.

Решение. Угол CAB является вписанным углом окружности и опирается на дугу $\cup CDB$. Откуда: $\cup CDB = 360° - \cup CAB =$
$= 360° - 130° = 230°$, $\angle CAB = \frac{1}{2} \cup CDB = \frac{1}{2} \cdot 230° = 115°$.

Ответ: $\angle CAB = 115°$.

3) На рисунке 7 $\angle APE = 46°$, $\angle BCE = 34°$. Найдите $\angle AEP$.

Решение. Вписанные углы PAB и BCP ... на одну и ту же ... BP, следовательно, $\angle PAB = \angle ... = ...$. Из треугольника AEP получим:

$$\angle AEP = 180° - (\angle ... + \angle ...) = 180° - (... + ...) = ...$$

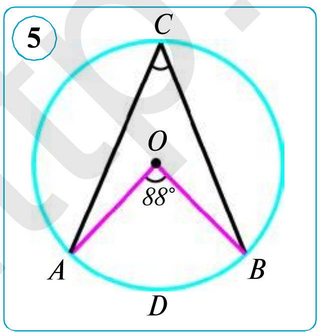
Ответ: $\angle AEP = ...$.

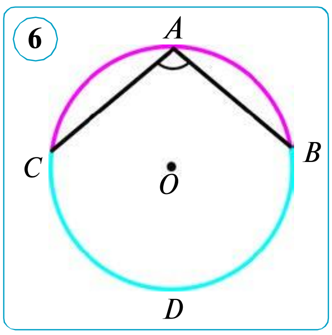
5. Точки A, B, C расположенные на окружности, делят эту окружность на три дуги, градусные меры которых относятся как $3:5:7$. Найдите углы треугольника ABC.

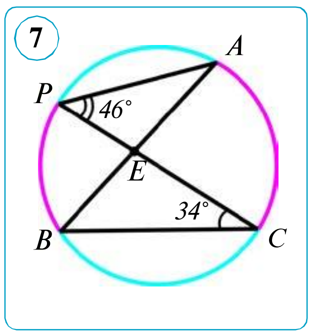
6. Хорда делит окружность на две части, градусные величины которых относятся как: 1) $5:4$; 2) $7:3$. Под каким углом видна эта хорда из любой точки окружности?

7. Проведены диаметр AB и хорда AC. Найдите угол BAC, если градусные меры дуг AC и CB относятся как $7:2$.

8. AB и BC − хорды окружности, $\angle BAC = 70°$, $\cup AB = 120°$. Найдите градусную меру дуги AC.







58. ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ, ОБРАЗОВАННЫХ СЕКУЩИМИ ОКРУЖНОСТИ

1. Угол, образованный касательной и хордой.

Теорема 1.

Угол, образованный касательной и хордой, исходящей из точки касания, измеряется половиной дуги, отсекаемой этой хордой.

Доказательство. Пусть AB касательная, BC хорда. Докажем, что $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup BmC$ (рис. 1). Для этого, проведем через вершину C $CD \parallel AB$, значит, $\angle ABC = \angle BCD$ (как внутренние накрест лежащие углы). Так как $\angle C = \frac{1}{2} \cup BnD$ и $CD \parallel AB$, то получим $\cup BnD = \cup BmC$ и $\angle B = \angle C = \frac{1}{2} \cup BnD = \frac{1}{2} \cup BmC$.

Задача 1. Хорда AB стягивает дугу окружности в 56°. Найдите углы, которые образует эта хорда с касательными к окружности, проведенными через ее конец.

Дано: $(O;\ R)$, AB − хорда $\angle AOB = 56^\circ$ − центральный угол, стягивающий хорду AB, $AC \perp OA$, $BC \perp OB$ (рис. 2).

Требуется найти: $\angle CAB$, $\angle CBA$, $\angle BAD$, $\angle ABE$.

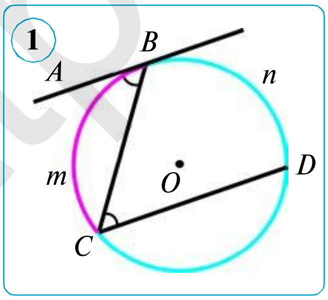
Решение. Угол, образованный касательной и хордой равен $\cup AB = 56^\circ$ (случай 1) или $\cup AnB = 360^\circ - 56^\circ = 304^\circ$ (случай 2).

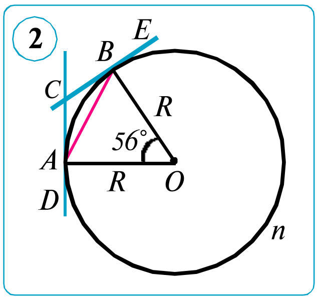
Таким образом, имеем: в 1-ом случае $\angle CAD = \frac{1}{2} \cup AB = \frac{1}{2} \cdot 56^\circ = 28^\circ$, а 2-ом случае $\angle BAD = \frac{1}{2} \cup AnB = \frac{1}{2} \cdot 304^\circ = 152^\circ$.

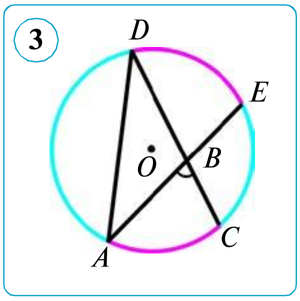
Нам известно, если из одной точки проведены две касательные к окружности, то отрезки касательных, заключенные между этой точкой и точками касания, равны. Поэтому треугольник ACB − равнобедренный.

Следовательно, $\angle CAB = \angle CBA = 28^\circ$ и $\angle BAD = \angle ABE = 152^\circ$.

Ответ: $\angle CAB = \angle CBA = 28^\circ$, $\angle BAD = \angle ABE = 152^\circ$.







2. Углы, образованные пересекающимися хордами.

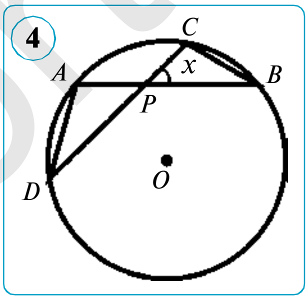
Теорема 2.

Каждый из вертикальных углов, образованных любыми двумя пересекающимися хордами, измеряется полусуммой дуг, на которые опираются его стороны и их продолжения.

Доказательство. Пусть $\angle ABC$ – один из двух углов, образованный пересекающимися хордами CD и AE (рис. 3). Докажем, что $\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup DE)$. Для этого, соединим точки A и D, тогда угол ABC является внешним углом треугольника $\triangle ABD$. Следовательно, $\angle ABC = \angle ADC + \angle DAE$. Но $\angle ADC = \frac{1}{2}\cup AC$ и $\angle DAE = \frac{1}{2}\cup DE$. Поэтому $\angle ABC = \frac{1}{2}\cup AC + \frac{1}{2}\cup DE = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup DE)$.

Аналогично докажите, что $\angle ABD = \angle CBE = \frac{1}{2}(\cup AD + \cup EC)$.

Задача 2. Пусть AB и CD – хорды одной окружности, которые пересекаются в точке P. Найдите угол CBP, если угол BPD в 4 раза больше угла BPC, а угол CDA на 26° больше угла BPC.



Дано: $\angle BPD = 4\angle BPC$, $\angle CDA = \angle BPC + 26°$ (рис. 4).

Требуется найти: $\angle CBP$.

Решение. $\angle BPD + \angle BPC = 180°$, $4\angle BPC + \angle BPC = 180°$, отсюда $5\angle BPC = 180°$ и наконец, $\angle BPC = 36°$.

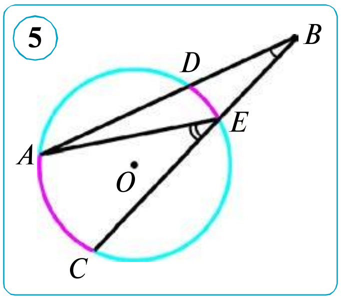
$\angle CDA = \angle BPC + 26° = 36° + 26° = 62°$. $\angle CBA = \angle CDA = 62°$, так как они являются внутренними углами, опирающиеся на одну дугу $\cup AC$. Отсюда $\angle CBP = \angle CBA = 62°$.

Ответ: $\angle CBP = 62°$.

3. Угол, образованный двумя секущими, пересекающимися вне окружности.

Теорема 3.

Угол (ABC), образованный двумя секущими, пересекающимися вне окружности, измеряется полуразностью дуг (AC и DE), заключенных внутри угла.



Доказательство. Пусть секущие BA и BC пересекаются в точке B. Докажем, что $\angle B = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup DE)$. Для этого соединим точки A и E (рис. 5). Угол AEC – внешний по отношению к треугольнику AEB. Значит, $\angle AEC = \angle B + \angle DAE$, откуда $\angle B = \angle AEC - DAE$. Но, $\angle AEC =$ 0,5$\cup AC$ и $\angle DAE =$ 0,5$\cup DE$. Следовательно, полуразностью этих дуг измеряется и данный угол:

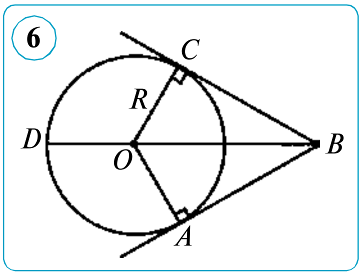
$$\angle B = \frac{1}{2}\cup AC - \frac{1}{2}\cup DE = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup DE).$$

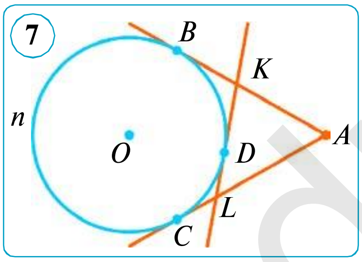
Значит, что $\angle B = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup DE)$. Теорема доказана.

4. Свойства двух касательных, проведенных из одной точки к окружности.

Теорема 4.

Угол, образованный двумя касательными, проведенными из одной точки к окружности равен разности 180° и меньшей из дуг заключенных между точками касания.





Доказательство. Пусть касательные BC и BA к окружности с центром в точке O, проведенные из точки B и касающиеся окружности в точках C и A, и BD биссектриса угла ABC. Докажем, что $AB = CB$, и центр O лежит на BD, и $\angle B = 180° - \cup AC$ (рис. 6).

Проведем радиусы OA и OC, так как $OA \perp BA$ и $OC \perp BC$, то $\triangle AOB$ и $\triangle COB$ – прямоугольные, и они равны $\triangle AOB = \triangle COB$, так как имеют общую гипотенузу BO, и равные катеты $OA = OC = R$. Из равенства треугольников, следует $AB = BC$. Так как $OC = OA = R$ и $OA \perp BA$, $AB = BC$ и $OC \perp BC$, то следует, что центр O лежит на биссектрисе BD. На основании теоремы о свойстве измерения углов, образованных двумя секущими, пересекающимися вне окружности, имеем:

$$\angle B = 0{,}5(\cup ADC - \cup AC) = 0{,}5(360° - \cup AC - \cup CA) = 180° - \cup AC,$$

значит, $\angle B = 180° - \cup AC$.

Теорема доказана.

Задача 3. Окружность разделена точками A, B и C на дуги, градусные величины которых относятся как 11 : 3 : 4. Через точки A, B и C проведены касательные до их взаимного пересечения. Найдите углы образовавшегося треугольника.

Решение. 1) $\cup BnC : \cup CD : \cup DB = 11 : 3 : 4$. Пусть AKL – треугольник образованный касательными, проведенными через точки касания до их взаимного пересечения (рис. 7). Находим углы A, AKL и ALK:

$$\cup BnC = \frac{360°}{11+3+4}\cdot 11 = 220°; \quad \cup CD = \frac{360°}{11+3+4}\cdot 3 = 60°;$$

$\cup DB = \frac{360^\circ}{11+3+4} \cdot 4 = 80^\circ$;

$\cup CDB = \cup CD + \cup DB = 60^\circ + 80^\circ = 140^\circ$;

$\angle A = 180^\circ - \cup CDB = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$,

$\angle BKD = 180^\circ - \cup DB = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$,

$\angle AKL = 180^\circ - \angle BKD = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$,

$\angle ALK = 180^\circ - (\angle A + \angle AKL) = 180^\circ - (40^\circ + 80^\circ) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Ответ: $\angle A = 40^\circ$, $\angle AKL = 80^\circ$, $\angle ALK = 60^\circ$.

Вопросы, задачи и задания

1. 1) Как измеряется угол: между касательной и хордой; между двумя пересекающимися хордами; образованный двумя секущими, пересекающимися вне окружности?
2) Каким свойством обладают две касательные, проведенные из одной точки?

2. Найдите угол, образованный хордой AB, длина которой равна радиусу окружности, и касательной, проходящей через точку A?

3. Один из углов, образованных пересекающимися хордами, равен 70°. Найдите сумму углов, смежных данному.

4. По данным рис. 8 найдите величину неизвестного угла x.

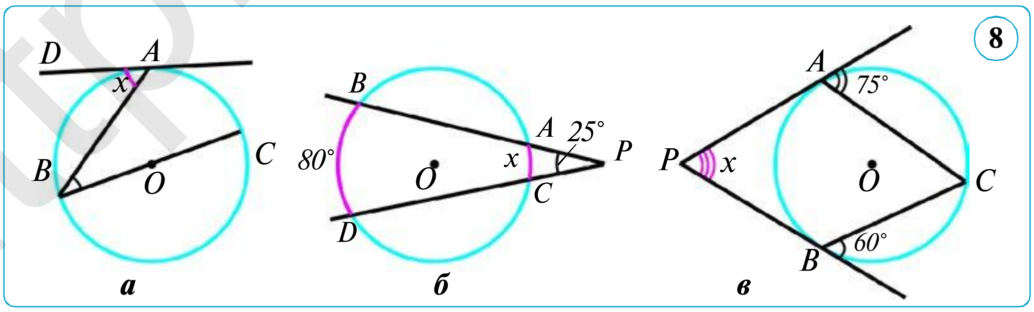
5. Угол между двумя радиусами равен 150°. Найдите угол между касательными, проведенными через концы этих радиусов

6. Касательные BA и BC, проведенные к окружности из точки B, точками касания делят окружность на дуги, относящиеся как: 1) 5 : 4; 2) 12 : 6; 3) 9 : 6; 4) 13 : 7; 5) 2 : 3. Найдите величину угла ABC .

7. Через конец хорды, делящей окружность в отношении: 1) 2 : 7; 2) 4 : 5 проведены касательные. Найдите углы образовавшегося треугольника.

8. Найдите угол между касательными, проведенными из точки, внешней по отношению к окружности, если точки касания делят окружность на две дуги, относящиеся как:
1) 1 : 9; 2) 3 : 15; 3) 7 : 11; 4) 3 : 7.

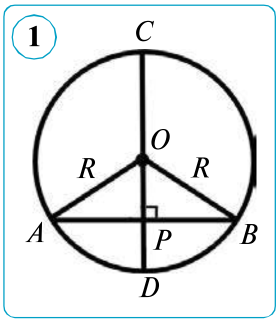
9. Угол между двумя радиусами равен: 1) 52°; 2) 74°; 3) 104°. Найдите угол между касательными, проведенными через концы этих радиусов.



59. СВОЙСТВА ХОРД И ДИАМЕТРОВ ОКРУЖНОСТЕЙ

Теорема 1.

Диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду и стягиваемую ею дугу пополам.



Доказательство. Пусть дана окружность с центром O и радиусом R, диаметр CD перпендикулярен хорде AB, P – точка пересечения CD и AB (рис. 1). Докажем, что $AP = PB$ и $\cup AD = \cup DB$.

В случае, когда хорда AB сама является диаметром, точка P совпадает с центром O и утверждение теоремы очевидно. Пусть хорда AB не является диаметром. Проведем радиусы OA и OB. Треугольник AOB – равнобедренный, так как $OA = OB = R$. Так как OP – высота, опущенная на основание AB, то она по свойству равнобедренного треугольника является медианой, проведенной к основанию, и биссектрисой угла при вершине O. Следовательно, диаметр, проходящий через середину хорды, делит хорду AB пополам, т.е. $AP = PB$. Так как OP – биссектриса угла AOB, то $\angle AOP = \angle BOP$, следовательно, $\cup AD = \cup DB$. Теорема доказана.

Теорема 2.

Хорда окружности не превосходит ее диаметра.

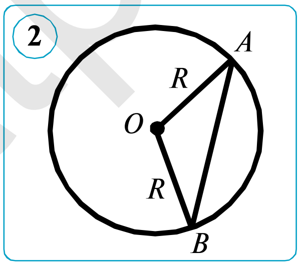
Доказательство. Треугольник OPB – прямоугольный (см. рис. 1). Тогда в этом треугольнике радиус OB – гипотенуза, PB – катет. Но известно, что катет не больше гипотенузы, т.е. $PB \le OB$, следовательно, $2PB \le 2 \cdot OB$ и $2PB = AB$ и $2OB = 2R = d$. Значит, $AB \le d$.

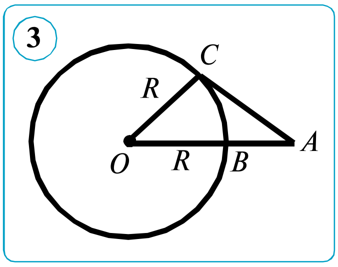
Следствие 1. *Если диаметр проходит через середину хорды, не являющейся диаметром, то он перпендикулярен этой хорде.*

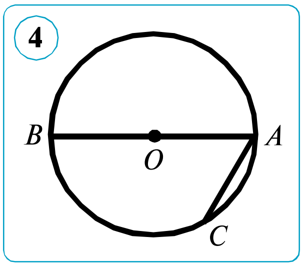
Следствие 2. *Серединный перпендикуляр хорды, является диаметром окружности.*

Докажите самостоятельно эти утверждения.

Задача 1. Докажите, что диаметр есть наибольшая хорда окружности.







Решение. Пусть дана окружность с центром в точке O и радиусом R, AB – произвольная хорда, отличная от диаметра (рис. 2). Проведем отрезки OA и OB. В треугольнике AOB сторона AB меньше суммы двух других сторон, т.е. $AB < OA + OB = R + R = 2R$. Следовательно, хорда AB меньше диаметра.

Задача 2. Точка A расположена вне окружности с радиусом R и удалена от центра O этой окружности на расстояние d. Чему равно наименьшее расстояние от точки A до точек данной окружности?

Решение. Пусть B – точка пересечения окружности с отрезком OA (рис. 3). Покажем, что расстояние AB является наименьшим из всех возможных расстояний от точки A до точек окружности. Действительно, для любой другой точки C окружности выполняется неравенство $AB + BO < AC + CO$. Так как $BO = CO = R$, то из этого неравенства получаем неравенство $AB < AC$. Учитывая, что $AO = d$ и $BO = R$, получаем, что искомое наименьшее расстояние равно длине отрезка AB, т.е. равно $d - R$.

Вопросы, задачи и задания

1. 1) Какими свойствами обладает диаметр, перпендикулярный хорде?
2) Может ли хорда окружности быть больше диаметра?
3) Может ли серединный перпендикуляр хорды не быть диаметром?

2. Начертите окружность и проведите два перпендикулярных друг другу диаметра AB и CD. Найдите градусные меры дуг, на которые делят окружность точки A, B, C и D.

3. Найдите расстояние от центра окружности до хорды, если хорда длиной 8 cm стягивает дугу в $90°$.

4. Из данной точки окружности проведены две хорды, равные радиусу окружности. Найдите угол между ними.

5. Из данной точки окружности проведены диаметр и хорда, равная радиусу окружности. Найдите угол между ними (рис. 4).

6. В окружности проведены две параллельные хорды, стягивающие дугу в $90°$. Длина одной из них 8 cm. Найдите расстояние между хордами.

7. Докажите, что две хорды окружности, которые не проходят через ее центр, пересекаясь, не могут делиться пополам.

8. От точки A окружности проведены две хорды AB и AC, длины которых равны радиусу. Точки B и C соединены отрезком. Найдите расстояние от центра окружности до хорды BC, если $R = 12$ cm.

9. В окружности проведены две параллельные хорды, стягивающие дугу в $90°$. Длина одной из них 10 cm. Найдите расстояние между хордами.

10. Радиус окружности равен 13 cm. Проведена хорда этой окружности, равная 10 cm. Вычислите расстояние от центра окружности до хорды.

11. Отрезок AB – диаметр окружности с центром O, AC и CB – равные хорды этой окружности. Найдите угол COB.

60. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ И ПРИМЕНЕНИЕ

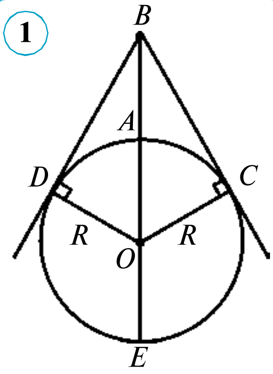
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ, РАЗВИВАЮЩИЙ ПРАКТИЧЕСКИЕ КОМПЕНТЕНЦИИ

ДАЛЬНОСТЬ ГОРИЗОНТА

Задача 1. (*Опорная задача.*) Докажите, что квадрат длины отрезка касательной равен произведению длины отрезка секущей на длину ее внешней части.

Решение. Пусть из точки B вне окружности с центром O проведены секущая BE и, касательные BC и BD (рис. 1).

1



Докажем, что $BC^2 = BE \cdot BA$. Для этого рассмотрим прямоугольный треугольник BOC ($\angle C = 90°$). Откуда по теореме Пифагора:

$$BC^2 = BO^2 - OC^2.$$

В это равенство подставим следующие обозначения $BO = BA + AO = BA + R$ и $OC = R$, полученное равенство упростим:

$$BC^2 = (BA + R)^2 - R^2 \Rightarrow BC^2 = BA^2 + 2BA \cdot R + R^2 - R^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow BC^2 = BA^2 + 2BA \cdot R \Rightarrow BC^2 = BA \cdot (BA + 2R) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow BC^2 = BA \cdot BE$$

Что и требовалось доказать.

1. Понятие о горизонте.

На ровном поле вы видите себя в центре окружности, которая ограничивает доступную вашему глазу земную поверхность. Это – горизонт. Линия горизонта неуловима: когда вы идете к ней, она от вас отодвигается. Но, недоступная, она все же реально существует; это не обман зрения, не мираж. Для каждой точки наблюдения имеется определенная граница видимой из нее земной поверхности, и дальность этой границы нетрудно вычислить. Чтобы уяснить себе геометрические отношения, связанные с горизонтом, обратимся к рис. 1 (или рис. 2), изображающему часть земного шара. В точке B помещается глаз наблюдателя на высоте BA над земной поверхностью. Как далеко видит кругом себя на ровном месте этот наблюдатель? Очевидно, только до точек C и D (рис. 1) или до точки C (рис. 2), где луч зрения касается земной поверхности: дальше земля лежит ниже луча зрения. Эти точки (и другие, лежащие на дуге окружности DAC) представляют собой границу видимой части земной поверхности, т.е. образуют линию горизонта. Наблюдателю должно казаться, что здесь небо опирается на землю, потому что в этих точках он видит одновременно и небо и земные предметы.

2. Дальность горизонта.

Как же далеко лежит от наблюдателя линия горизонта? Другими словами: как велик радиус того круга, в центре которого мы видим себя на ровной местности? Как вычислить дальность горизонта, зная величину возвышения наблюдателя над земной поверхностью?

Задача сводится к вычислению длины отрезка BC (рис. 2) касательной, проведенной из глаза наблюдателя к земной поверхности. Квадрат касательной – как мы знаем из решения задачи 1 – равен произведению внешнего отрезка $BA = h$ секущей на всю длину этой секущей, т.е. на $BE = h + 2R$: $d^2 = (h + 2R) \cdot h$, где R – радиус земного шара, $BC = d$ – дальность горизонта. Так как возвышение глаза наблюдателя над землей обычно крайне мало по сравнению с диаметром ($2R$) земного шара, составляя например, для высочайшего поднятия самолета около 0,001 диаметра, то $2R + h$ можно принять равным $2R$, и тогда формула упростится:

$$d^2 \approx 2Rh.$$

Значит, дальность горизонта можно вычислять по очень простой формуле:

$$d \approx \sqrt{2Rh},$$

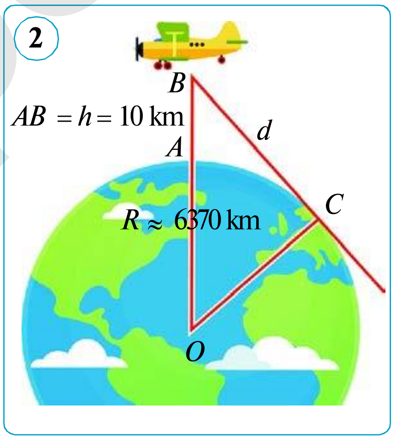
где R – радиус земного шара (около 6400 km, или точнее 6371 km), а h – возвышение глаза наблюдателя над земной поверхностью.

Так как $\sqrt{6400} = 80$, то формуле можно придать следующий вид:

$$d \approx 80\sqrt{2h} \approx 113\sqrt{h}$$

где h непременно должно быть выражено в частях километра.

Задача 2. Как далеко видна поверхность Земли с самолета, летящего на высоте 10 km над Землей (радиус Земли около 6370 km.)



Решение. $OA = R \approx 6370$ km, $AB = h = 10$ km. Находим $BC = d$ (рис. 2). Вы знаете, что квадрат длины отрезка касательной равен произведению длины отрезка секущей на длину ее внешней части, т.е.

$$d^2 = (h + 2R) \cdot h \quad \text{или}$$

$$d^2 = (10 + 2 \cdot 6370) \cdot 10 = 127\,500,$$

отсюда:

$$d = \sqrt{127500} = \sqrt{51 \cdot 2500} = 50\sqrt{51} \approx$$
$$\approx 50 \cdot 7,141 = 357,05 \approx 360 \text{ (km)}.$$

Ответ: ≈ 360 km.

Задача 3. Как далеко видна поверхность Земли с воздушного шара, летящего на высоте 4 km (радиус Земли около 6370 km)?

Ответ: ≈ 225,8 km.

Задача 4. Как далеко можно видеть поверхность Земли с вершины Эльбруса, возвышающегося над уровнем моря около 5600 m (точнее 5642 m)? Радиус Земли около 6370 km.

Ответ: ≈ 270 km.

Примечание! *Приведенные расчеты чисто геометрические, упрощенные. Здесь не учтены физические факторы, влияющие на дальность горизонта.*

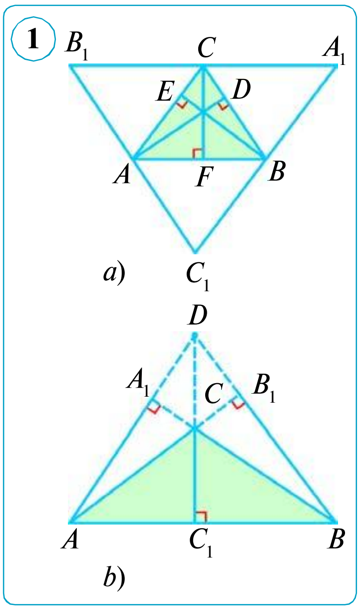
ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Рассмотрим четыре замечательные точки треугольника.

1. Точка пересечения высот треугольника.

Теорема 1.

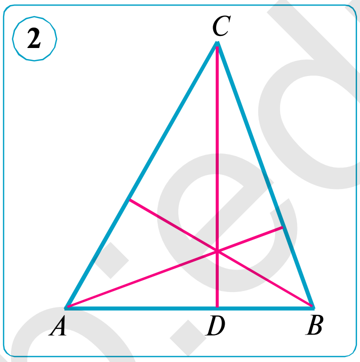
Высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке.



Доказательство. Пусть AD, BF и CE – высоты треугольника ABC (рис. 1, *a*). Проведя через вершины треугольника прямые, параллельные противолежащим сторонам, получим треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого перпендикулярны высотам треугольника. По построению четырехугольники C_1BCA и B_1ABC – параллелограммы, откуда $C_1A = BC$ и $BC = AB_1$. Следовательно, точка A – середина отрезка B_1C_1. Аналогично доказываем, что точка B – середина A_1C_1 и C – середина A_1B_1.

Таким образом, высоты AD, BF и CE лежат на серединных перпендикулярах к сторонам треугольника $A_1B_1C_1$, которые пересекаются в одной точке. Заметим, что высоты треугольника могут не пересекаться. На рис. 1, б изображен тупоугольный треугольник, в котором продолжения высот пересекаются в одной точке D, а сами высоты не пересекаются.

Точку пересечения высот (или их продолжений) иначе называют *ортоцентром* треугольника.



Задача. К какой из сторон треугольника ближе расположен ортоцентр?

Решение. Пусть в треугольнике ABC $AC > BC$ (рис. 2). Воспользуемся тем, что для высоты CD этого теугольника будет выполняться неравенство $AD > BD$ и, следовательно $\angle ACD > \angle BCD$. Это означает, что точки высоты расположены ближе к меньшей из сторон, выходящих из этой вершины. Следовательно, ортоцентр треугольника расположен ближе к меньшей стороне

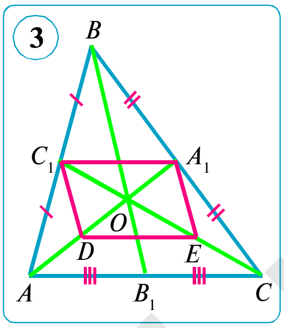
2. Точка пересечения медиан треугольника.

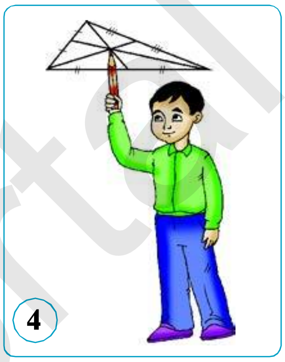
Теорема 2.

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в этой точке в отношении 2 : 1, считая от вершин.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1 и CC_1 (рис. 3). Докажем, что они пересекаюся в некоторой точке O, причем $AO : OA_1 = BO : OB_1 = CO : OC_1 = 2 : 1$.

Пусть O – точка пересечения медиан AA_1 и CC_1, точки D и E – середины отрезков AO и CO соответственно. Отрезок C_1A_1 – средняя линия треугольника ABC, и по свойству средней линии треугольника: $C_1A_1 \parallel AC$, $C_1A_1 = 0{,}5AC$. Кроме того, DE – средняя линия треугольника AOC, и по тому же свойству: $DE \parallel AC$, $DE = 0{,}5AC$. Значит, в четырехугольнике DC_1A_1E две стороны параллельны и равны. Таким образом, DC_1A_1E – параллелограмм, и его диагонали DA_1 и C_1E точкой пересечения делятся пополам. Следовательно, $AD = DO = OA_1$, $CE = EO = OC_1$, т.е. точка O делит медианы AA_1 и CC_1 в отношении $2 : 1$.





Аналогично доказываем, что и третья медиана BB_1 точкой пересечения с каждой из медиан AA_1 и CC_1 делится в отношении $2 : 1$. А поскольку такая точка деления для каждой из медиан единственная, то, следовательно, все три медианы пересекаются в одной точке.

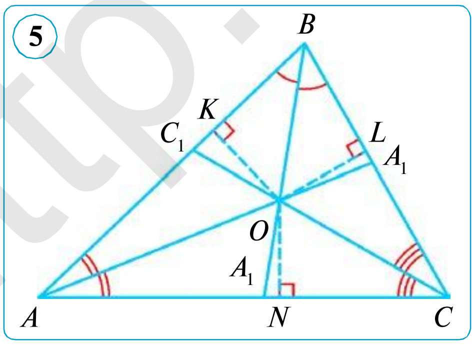
Точку пересечения медиан треугольника иначе называют *центроидом* или *центром масс* треугольника. В уместности такого названия вы можете убедиться, проведя эксперимент: вырежьте из картона треугольник произвольной формы, проведите в нем медианы и попробуйте удержать его в равновесии, положив на иглу или острый карандаш в точке пересечения медиан (рис. 4).

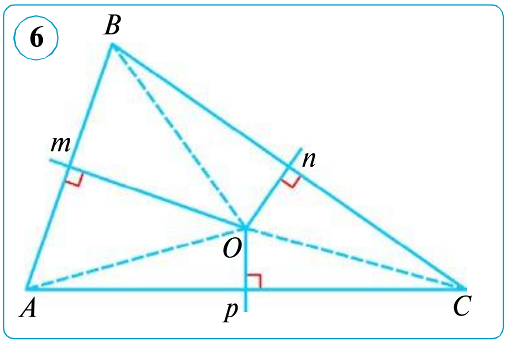
3. Точка пересечения биссектрис треугольника.

Теорема 3.

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство. Обозначим буквой O точку пересечения биссектрис AA_1 и BB_1 треугольника ABC и проведем из этой точки перпендикуляры AB, BC и CA соответственно к прямым OK, OL и OM (рис. 5). Нам





известно, что каждая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от его сторон: $OK = OK$ и $OK = OL$. Поэтому $ON = OL$, т.е. точка O равноудалена от сторон угла ACB и, значит, лежит на биссектрисе CC_1 этого угла. Следовательно, все три биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O, что и требовалось доказать.

4. Точка пересечения серединных перпендикуляров треугольника.

Теорема 4.

Серединные перпендикуляры, проведенные к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство. Обозначим буквой O точку пересечения серединных перпендикуляров m и n к сторонам AB и BC треугольника ABC (рис. 6). Нам известно, что каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка: $OA = OB$ (1) и $OB = OC$ (2). Из равенств (1) и (2) находим: $OA = OC$, т.е. точка O равноудалена от концов отрезка AC и, значит, лежит на серединном перпендикуляре p к этому отрезку. Следовательно, все три серединных перпендикуляра m, n и p к сторонам треугольника пересекаются в точке O. Теорема доказана.

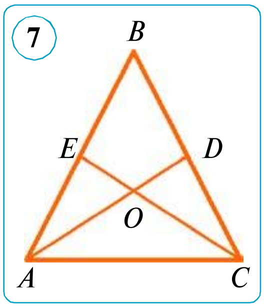
Вопросы, задачи и задания

1. 1) Всегда ли высоты треугольника пересекаются?

? 2) Сколько вы знаете замечательных точек в треугольнике?

2. Как расположены замечательные точки в равностороннем треугольнике?

3. Если в треугольнике две медианы равны, то он равнобедренный. Докажите.



Решение. Пусть в треугольнике ABC медианы AD и CE пересекаются в точке O (рис. 7). Рассмотрим треугольники AOE и COD. Поскольку точка O делит каждую из равных медиан AD и CE в отношении $2:1$, то $AO = CO$, $EO = DO$. Кроме того, $\angle AOE = \angle COD$ как вертикальные. Значит, $\triangle AOE = \triangle COD$ по первому признаку. Отсюда следует $AE = CD$. Но по определению медианы, эти отрезки – половины сторон AB и CB. Следовательно, $AB = CB$, т.е. треугольник ABC равнобедренный. Что и требовалось доказать.

4. Докажите, что в равнобедренном треугольнике все четыре замечательные точки лежат на одной прямой. Какая это прямая?

5. В треугольнике точка пересечения медиан совпадает с ортоцентром. Докажите, что данный треугольник равносторонний.

6. Может ли вершина треугольника быть точкой пересечения его высот?

7. Точка пересечения медиан треугольника делит одну из медиан на отрезки, разность которых равна 3 cm. Найдите длину этой медианы.

61–62. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 5. РАБОТА НАД ОШИБКАМИ

1. AB – диаметр окружности с центром O. Найдите угол DCO, если $OA = OC = AC$.

2. Наибольшее и наименьшее расстояния от данной точки, расположенной вне окружности, до точек окружности равны соответственно 50 cm и 20 cm. Найдите радиус данной окружности.

3. Прямые AB и AC касаются окружности с центром O, в точках B и C. Найдите BC, если $\angle OAB = 30^\circ$ и $AB = 5$ cm.

4. Окружность разделена на три части, градусные меры которых относятся как 11 : 16 : 9. Найдите углы треугольника, полученного последовательным соединением точек деления.

ТЕСТ 5 Проверьте себя!

1. Расстояние от центра окружности до точки B равно 5 cm, радиус 12 cm. Найдите наименьшее и наибольшее расстояние от точки B до точек данной окружности.

А) 7 cm, 17 cm; Б) 7 cm, 12 cm; С) 5 cm, 7 cm; Д) 7 cm, 24 cm.

2. Наибольшее и наименьшее расстояния от данной точки, расположенной вне окружности, до точек окружности равны соответственно 30 cm и 10 cm. Найдите радиус данной окружности.

А) 20 cm; Б) 10 cm; В) 15 cm; Г) 5 cm.

3. AB – диаметр окружности с центром O. Найдите угол CAO, если $OA = OC = BC$.

А) 60°; Б) 30°; В) 90°; Г) 120°.

4. Из точки окружности с радиусом R проведены две хорды длиной равной R. Найдите угол между хордами.

А) 120°; Б) 110°; В) 135°; Г) 40°.

5. Один из углов, образованных пересекающимися хордами равен 80°. Найдите сумму углов, смежных этому углу.

А) 200°; Б) 90°; В) 100°; Г) 160°.

6. Из точки вне окружности проведены к ней две касательные, образующие угол 72°. Найдите большую из дуг, заключенных между точками касания.

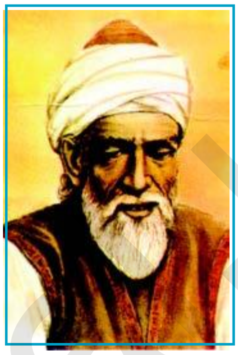
А) 248°; Б) 240°; В) 252°; Г) 236°.

Изучаем английский язык!

Окружность – circle
Хорда – chord
Радиус – radius
Дуга – arc

Диаметр – diameter
Центральный угол – central angle
Касательная к окружности – tangent to the circle
Перпендикуляр – perpendicular

Исторические сведения



Абул Вафа
(940–998)

Абул Вафа ал-Бузджани родился в 940 году в городе Бузджан (Современная Кушка). Учился и работал в Багдаде. В сочинении Абулу Вафа «Книга о том, что необходимо знать ремесленнику из геометрических построений» главы I и IV посвящены построениям с помощью циркуля и линейки. В качестве примера мы проведем принадлежащее Абулу Вафа решение задачи о нахождении центра окружности

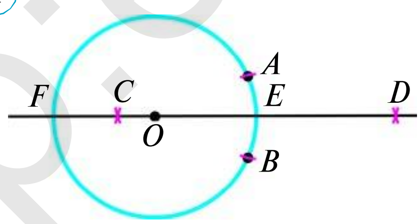
«Если спрашивают «Как найти центр окружности?», надо выбрать на окружности две точки A и B и построить окружности с центром в точке A и B, радиусом, большим половины расстояния AB. Пусть они пересекаются в точках *C и D* (*рис.* 1*). Проводим прямую CD и находим точки E и F пересечения этой прямой с окружностью. Делим отрезок EF пополам, тогда середина O отрезка EF – искомый центр окружности.*

Этот метод Абула Вафа основан на том, что дуги, построенные из центров *A* и *B*, пересекаются в точках *C и D* и отрезок *CD* перпендикулярен хорде *AB* и проходит через центр окружности.

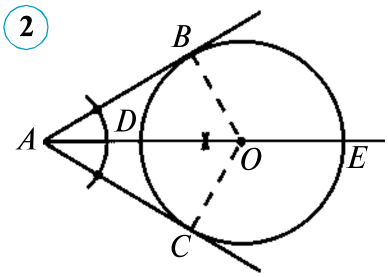
Сегодня эта задача решается так: предположим, что дана окружность. центр которой неизвестен, и его требуется найти (рис. 2).

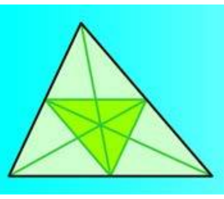
Из некоторой точки *A* проводим касательные *AB* и *AC* к этой окружности и строим биссектрису угла *BAC*. Она пересекает окружность в точках *D* и *E*. *Делим отрезок DE* пополам, тогда середина *O* отрезка *DE – искомый центр окружности*. Докажите. Или проведем через точку *B* перпендикуляр к касательной *AB*, тогда точка пересечения перпендикуляра с биссектрисой будет центром *O* окружности. Докажите. Вместе с этим Абул Вафа решает задачи о восстанавлении окружности по заданной ее дуге, о построении касательной к окружности, проходящей через заданную точку вне окружности, о построении касательной в данной точке окружности.

1



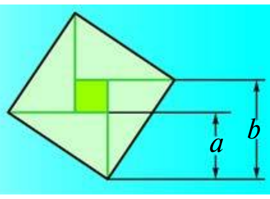
2





ГЛАВА VI

ПОВТОРЕНИЕ



УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ МАТЕРИАЛА ПРОЙДЕННОГО В 8- М КЛАССЕ

1. Три внешних угла четырехугольника равны соответственно 142°, 22° и 136°. Найдите внутренние углы этого четырехугольника.

2. Найдите периметр четырехугольника, если его наименьшая сторона равна 7 cm, а каждая следующая сторона на 4 cm больше предыдущей.

3. Острый угол прямоугольной трапеции равен 45°. Меньшая сторона и меньшее основание равны 24 cm. Найдите большее основание трапеции.

4. Стороны равнобедренного треугольника равны: 1) 6 cm, 5 cm и 5 cm; 2) 24 cm, 15 cm и 15 cm; 3) 3,2 dm, 20 cm и 20 cm; 4) 22 cm, 60 cm и 60 cm. Найдите площадь и высоту, проведеную к боковой стороне этого треугольника.

5. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = CD$, $AD = BC$. Найдите углы четырехугольника, если угол A втрое больше угла B.

6. В равнобедренной трапеции $ABCD$ $BC = 20$ cm, $AB = 24$ cm и $\angle D = 60°$. Найдите основание AD.

7. В треугольнике ABC AE и BD − высоты. Найдите AE, если $AC = 20$ cm, $BD = 16$ cm и $BC = 32$ cm.

8. Площадь прямоугольного треугольника равна 168 cm^2. Найдите катеты треугольника, если один из катетов равен $\frac{7}{12}$ части другого.

9. Площадь треугольника равна 24 cm^2. Найдите высоту треугольника, проведенную к стороне, равной 16 cm.

10. Диагонали AC и BD ромба $ABCD$ равны соотвественно 30 cm и 12 cm. Найдите площадь этого ромба.

11. Найдите площадь треугольника, если его стороны равны:
1) 15, 15, 18; 2) 39, 42, 45; 3) 4, 13, 15; 4) 29, 25, 6.

12. В треугольнике ABC $BC = 34$ cm. Из середины отрезка BC к прямой AC проведен перпендикуляр, который делит сторону AC на отрезки $AF = 25$ cm и $FC = 15$ cm. Найдите площадь треугольника ABC.

13. Диагонали ромба равны 18 dm и 24 dm. Найдите периметр ромба и расстояние между параллельными сторонами.

14. Высота равнобедренной трапеции вдвое меньше ее боковой стороны. Найдите углы трапеции.

15. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки равностороннего треугольника до его сторон постоянная (одинакова) и равна высоте этого треугольника.

16. Окружность разделена точками A, B и C на дуги, градусные величины которых относятся как: 1) 14 : 6 : 4; 2) 13 : 12 : 5; 3) 17 : 10 : 9. Через точки A, B и C проведены касательные до их взаимного пересечения. Найдите углы образовавшегося треугольника.

17. Как изменится площадь прямоугольника, если его длину увеличить на 30 %, а ширину уменьшить на 30 %?

18. Как изменится площадь треугольника, если его основание увеличить на 20 %, а высоту уменьшить на 20 %?

19. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 540 cm^2, а отношение соседних сторон равно 3 : 5.

20. Площадь параллелограмма равна 24 cm^2, высоты равны 3 cm и 4 cm. Найдите периметр этого параллелограмма.

21. Начертите какой-нибудь параллелограмм $ABCD$. Постройте векторы:

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$; 3) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$; 4) $\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}$.

22. Чему равны координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если:

1) $A(0;\ 1)$, $B(1;\ 0)$; 2) $A(-2;\ 1)$, $B(-4;\ 3)$?

23. Точка O – середина медианы AA_1 треугольника ABC. Выразите вектор $\overrightarrow{BO}$ через векторы $\vec{a}=\overrightarrow{BA}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$.

24. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, а точка P – середина отрезка OB. Выразите вектор $\overrightarrow{AP}$ через векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$.

25. Из концов дуги в 240°, проведены касательные до их взаимного пересечения. Найдите углы между ними.

26. Найдите наибольший угол параллелограмма, если один из его углов больше другого в 4 раза.

27. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 288 cm^2, а отношение соседних сторон равно 1 : 2.

28. Высота, опущенная на одну из сторон параллелограмма, площадь которого 48 cm^2, в три раза меньше этой стороны. Найдите эту сторону и высоту.

29. Площадь квадрата равна 16 cm^2. Как изменится площадь этого квадрата, если его стороны: 1) уменьшить в 2 раза; 2) увеличить в 3 раза?

30. Точка C – середина отрезка AB. Найдите ее координаты, если:

1) $A(-3;\ -12)$, $B(1;\ -8)$; 2) $A(9;\ -2)$, $B(-7;\ -2)$.

ИТОГОВАЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА. РАБОТА НАД ОШИБКАМИ

1. Меньшая сторона прямоугольника равна 10 cm, а диагонали пересекаются под углом 60°. Найдите диагонали прямоугольника.
2. Стороны треугольника равны 11 cm, 7 cm и 10 cm. Найдите стороны треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.
3. Найдите площадь треугольника, если его стороны равны 21 cm, 72 cm и 75 cm.
4. Из точки вне окружности проведены к ней две касательные, образующие угол 75°. Найдите дуги, заключенные между сторонами касательных.
5. Найдите координаты вектора $\vec{m} = \vec{a} - 2\vec{b}$, если $\vec{a}(2; -3)$ и $\vec{b}(-2; -3)$.

ТЕСТ 6 Проверьте себя!

1. Углы четырехугольника относятся $3:5:4:6$. Найдите наименьший угол.
А) 80°; Б) 30°; В) 60°; Д) 40°.
2. На сколько треугольников разбивают диагонали выпуклого четырехугольника?
А) 4; Б) 5; В) 6; Д) 8.
3. Ширина прямоугольника равна 5 cm, длина на 7 cm больше. Найдите периметр прямоугольника.
А) 32 cm; Б) 34 cm; В) 24 cm; Д) 26 cm.
4. Сколько сторон у выпуклого многоугольника, если каждый его угол равен 162°?
А) 18; Б) 20; В) 15; Д) 12.
5. Стороны параллелограмма пропорциональны числам 3 и 7. Найдите меньшую сторону, если его периметр равен 18 cm.
А) 2,7 cm; Б) 3,4 cm; В) 5,4 cm; Д) 4,5 cm.
6. Площадь земельного участка в форме прямоугольника равна 2 гектарам. Чему равна длина этого участка, если ширина участка равна 32 m?
А) 610 m; Б) 615 m; В) 625 m; Д) 630 m.
7. Высота ромба равна 5 cm, произведение диагоналей 80 cm^2. Найдите его периметр.
А) 32 cm; Б) 16 cm; В) 24 cm; Д) 28 cm.
8. Найдите координаты вектора $\vec{m} = -\vec{a} + 2\vec{b}$, если $\vec{a}(2; -3)$ и $\vec{b}(-2; -3)$.
А) (–6; –3); Б) (–3; 6); В) (–2; –9); Д) (2; –3).
9. Даны векторы $\vec{a}(3; 2)$ и $\vec{b}(0; -1)$. Найдите модуль вектора $2\vec{a} - 4\vec{b}$.
А) 10; Б) 6; В) 8; Д) 3.

Таблица значений тригонометрических функций острого угла. Приложение

Градусы	sinα $1^\circ \le \alpha \le 45^\circ$	tgα $1^\circ \le \alpha \le 45^\circ$	ctgα $1^\circ \le \alpha \le 45^\circ$	cosα $1^\circ \le \alpha \le 45^\circ$	Градусы
1	≈ 0,0175	≈ 0,0175	≈ 57,290	≈ 0,9998	89
2	≈ 0,0349	≈ 0,0349	≈ 28,636	≈ 0,9994	88
3	≈ 0,0523	≈ 0,0524	≈ 19,081	≈ 0,9986	87
4	≈ 0,0698	≈ 0,0699	≈ 14,301	≈ 0,9976	86
5	≈ 0,0872	≈ 0,0875	≈ 11,430	≈ 0,9962	85
6	≈ 0,1045	≈ 0,1051	≈ 9,514	≈ 0,9945	84
7	≈ 0,1219	≈ 0,1228	≈ 8,144	≈ 0,9925	83
8	≈ 0,1392	≈ 0,1405	≈ 7,115	≈ 0,9903	82
9	≈ 0,1564	≈ 0,1584	≈ 6,314	≈ 0,9877	81
10	≈ 0,1736	≈ 0,1763	≈ 5,671	≈ 0,9848	80
11	≈ 0,1908	≈ 0,1944	≈ 5,145	≈ 0,9816	79
12	≈ 0,2079	≈ 0,2126	≈ 4,705	≈ 0,9781	78
13	≈ 0,2250	≈ 0,2309	≈ 4,331	≈ 0,9744	77
14	≈ 0,2419	≈ 0,2493	≈ 4,011	≈ 0,9703	76
15	≈ 0,2588	≈ 0,2679	≈ 3,732	≈ 0,9659	75
16	≈ 0,2756	≈ 0,2867	≈ 3,487	≈ 0,9613	74
17	≈ 0,2924	≈ 0,3057	≈ 3,271	≈ 0,9563	73
18	≈ 0,3090	≈ 0,3249	≈ 3,078	≈ 0,9511	72
19	≈ 0,3256	≈ 0,3443	≈ 2,904	≈ 0,9455	71
20	≈ 0,3420	≈ 0,3640	≈ 2,747	≈ 0,9397	70
21	≈ 0,3584	≈ 0,3839	≈ 2,605	≈ 0,9336	69
22	≈ 0,3746	≈ 0,4040	≈ 2,475	≈ 0,9272	68
23	≈ 0,3907	≈ 0,4245	≈ 2,356	≈ 0,9205	67
24	≈ 0,4067	≈ 0,4452	≈ 2,246	≈ 0,9135	66
25	≈ 0,4226	≈ 0,4663	≈ 2,145	≈ 0,9063	65
26	≈ 0,4384	≈ 0,4877	≈ 2,050	≈ 0,8988	64
27	≈ 0,4540	≈ 0,5095	≈ 1,963	≈ 0,8910	63
28	≈ 0,4695	≈ 0,5317	≈ 1,881	≈ 0,8829	62
29	≈ 0,4848	≈ 0,5543	≈ 1,804	≈ 0,8746	61
30	0,5000	≈ 0,5774	≈ 1,732	≈ 0,8660	60
31	≈ 0,5150	≈ 0,6009	≈ 1,664	≈ 0,8572	59
32	≈ 0,5299	≈ 0,6249	≈ 1,600	≈ 0,8480	58
33	≈ 0,5446	≈ 0,6494	≈ 1,540	≈ 0,8387	57
34	≈ 0,5592	≈ 0,6745	≈ 1,483	≈ 0,8290	56
35	≈ 0,5736	≈ 0,7002	≈ 1,428	≈ 0,8192	55
36	≈ 0,5878	≈ 0,7265	≈ 1,376	≈ 0,8090	54
37	≈ 0,6018	≈ 0,7536	≈ 1,327	≈ 0,7986	53
38	≈ 0,6157	≈ 0,7813	≈ 1,280	≈ 0,7880	52
39	≈ 0,6293	≈ 0,8098	≈ 1,235	≈ 0,7771	51
40	≈ 0,6428	≈ 0,8391	≈ 1,192	≈ 0,7660	50
41	≈ 0,6561	≈ 0,8693	≈ 1,150	≈ 0,7547	49
42	≈ 0,6691	≈ 0,9004	≈ 1,111	≈ 0,7431	48
43	≈ 0,6820	≈ 0,9325	≈ 1,072	≈ 0,7314	47
44	≈ 0,6947	≈ 0,9657	≈ 1,036	≈ 0,7193	46
45	≈ 0,7071	1,0000	1,000	≈ 0,7071	45
Градусы	**cosα $45^\circ \le \alpha \le 89^\circ$**	**ctgα $45^\circ \le \alpha \le 89^\circ$**	**tgα $45^\circ \le \alpha \le 89^\circ$**	**sinα $45^\circ \le \alpha \le 89^\circ$**	**Градусы**

ОТВЕТЫ

Повторение курса 7-ого класса. 5. 9 dm. **7.** 3 cm. **9.** Да, равны. **10.** 52°, 63°, 65°. **11.** 60°. **13.** 24°, 72°, 84°. **14.** Нет, не могут. **18.** 58°.

Глава I. Тема 1. 2. 1) $n = 8$; 2) $n = 11$; 3) $n = 24$. **4.** 60°. **5.** 1) $n = 12$; 2) $n = 36$; 3) $n = 40$. **6.** $n = 8$. **7.** 1) $n = 20$; 2) $n = 15$; 3) $n = 6$. **9.** 1) $n = 24$; 2) $n = 8$; 3) $n = 5$. **10.** 36°, 72°, 108°, 144°. **Тема 2. 2.** 25,5 cm, 50,5 cm. **3.** 1) 35°, 145°, 35°, 145°; 3) 85°, 105°, 85°, 105°. **4.** P_{ABO} =20 cm; P_{BOC} =24 cm. **5.** $AB = DC = 16$ cm, $AD = BC = 4$ cm. **Тема 3. 2.** 1) Да, правильно. **3.** 32 cm. **7.** 26 cm. **8.** 45°, 135°, 135°, 45°. **9.** 26 cm или 28 cm. **Тема 4. 2.** 1) 9 cm; 2) 7 cm. **3.** 12 cm. **4.** $AB = DC = 4$ cm, $BC = AD = 8$ cm. **6.** 1) $4 + 7 < 12$ − неравенство треугольника не выполняется; нет, не может. **7.** 7 cm, 14 cm, 7 cm, 14 cm. **Темы 5−6. 2.** 10 cm. **3.** $BP = 12$ cm. **5.** 7 cm. **6.** 40°, 140°, 40°, 140°. **9.** 12 cm, 24 cm, 30 cm, 42 cm. **10.** 64 cm. **12.** 30 cm. **13.** 32 cm. **Темы 7−8. 3.** 150°. **4.** 23 cm. **6.** 27 cm, 11 cm. **7.** 20 cm, 14 cm. **10.** 90°, 90°, 100°, 80°. **11.** 71°, 109°, 109°, 71°. **12.** 70 cm. **Тема 9. 3.** $AC = 5$ cm. **4.** $OB_1 = 3{,}2$ cm, $OB_2 = 4{,}8$ cm, $OB_3 = 6{,}4$ cm. **6.** 2) 19 cm. **8.** $x = 4$. **9.** $OB_1 = 9$ cm, $OB_2 = 13{,}5$ cm, $OB_3 = 18$ cm. **Темы 10−11. 2.** 2,5 cm, 3,5 cm, 5,5 cm. **4.** 22 cm, 10 cm. **6.** 2) 15 cm. **9.** 24 cm, 12 cm. **10.** 3 cm. **11.** 30 cm, 10 cm. **12.** 12 cm.

Глава II. Тема 15. 2. а) cosα; б) tgα; в) sinα; г) ctgα. **4.** а) Да, так как 0,98 < 1; б) нет, так как $\sqrt{2} > 1$; в) да, так как $\sqrt{5} - 2 < 1$. **5.** $ML = 24$, $MN = 25$. **6.** $\sin M = \frac{5}{13}$, $\cos M = \frac{12}{13}$, $\mathrm{tg} M = \frac{5}{12}$, $\mathrm{ctg} M = \frac{12}{5}$. **Тема 16. 2.** а) Верно, так как $a = c\sin\alpha$; в) неверно, так как $c = \frac{a}{\sin\alpha}$. **3.** Да, так как значением тангенса является любое положительное число. **4.** 1) 16 cm; 2) 50 cm. **6.** 16 cm. **7.** 5 cm. **8.** 50 cm. **Тема 17. 2.** 1) 13; 2) 9; 3) 2,5. **3.** 1) 40 cm; 2) 100 cm. **4.** $x = \sqrt{3}$; $y = \sqrt{2}$. **5.** 1) 0,5; 2) $4\sqrt{2}$; 3) 0,8; 4) 1,5. **Тема 18. 2.** 1) Нет, так как $121 + 49 \neq 289$; 2) да, так как $3^2 + 1{,}6^2 = 3{,}4^2$, $11{,}56 = 11{,}56$. **5.** Имеет два решения. **6.** 1) Да, так как $12^2 + 35^2 = 37^2$; 2) нет, так как $11^2 + 20^2 \neq 25^2$. **Тема 19. 1.** 1) 9,6 cm, 9,6 cm, 8 cm. **2.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}h$. **3.** 1) $h_b = \frac{12}{7}\sqrt{6}$ cm; 2) $h_c = 11{,}2$ dm; 3) $h_b = 6{,}72$ cm. **4.** 1) $h = 6\sqrt{3}$ cm. **5.** $h_a = \frac{15}{4}\sqrt{7}$ cm; $h_c = \frac{5}{2}\sqrt{7}$ cm. **7.** $h_a = \frac{3}{2}\sqrt{15}$ cm. **Темы 20−21. 2.** 1) $\frac{5}{13}$; 2,4; $\frac{5}{12}$. **4.** 1) 2; 2) 1; 3) 1. **5.** 1) ctg²α; 2) tgα. **7.** 1) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\frac{1}{2}$. **9.** 1) $\cos\alpha = \frac{15}{17}$; $\mathrm{tg}\alpha = \frac{8}{15}$; $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{15}{8}$. **12.** 1) sin²α; 2) cos³α. **14.** 1) sin²α; 2) sin³α. **Тема 22. 2.** 1) $x \approx 50°$; 2) $x \approx 14°$; 3) $x \approx 34°$; 4) $x \approx 74°$. **3.** 1) $\sin B = 0{,}6$; $\cos B = 0{,}8$. **5.** $\cos A = 0{,}5$; $\mathrm{tg} A = \sqrt{3}$. **7.** 1) sinα = 0,6; cosα = 0,8. **8.** 1) sinα; 2) cos²α. **Тема 23. 1.** 1) 1,5; 3) 0,5. **3.** $\frac{32\sqrt{3}}{3}$; $\frac{16\sqrt{3}}{3}$. **4.** 12; 6. **5.** 1) sin²α; 2) sin²α. **7.** 2. **8.** 1) 0,5; 2) 0,5; 3) 1. **24- mavzu. 1.** а) 1) $\approx 0{,}0523$; 2) $\approx 0{,}3584$; 3) $\approx 0{,}7660$; 4) $\approx 0{,}6428$; г) 1) $\approx 5{,}67$; 2) $\approx 1{,}732$; 3) $\approx 0{,}2679$; 4) $\approx 11{,}430$. **2.** б) 1) $\approx 42°$; 2) $\approx 50°$; 3) $\approx 87°$; в) 1) $\approx 25°$; 2) $\approx 85°$; 3) $\approx 10°$. **4.** 1. **6.** 1) 1; 2) 0. **7.** 1) $\approx 0{,}9397$; 4) $\approx 23{,}078$. **8.** $x \approx 8°$. **Тема 25. 1.** 14 cm. **2.** 45°, 45°. **3.** $a \approx 6{,}691$; $b \approx 7{,}431$; $\beta \approx 48°$. **5.** cos²α. **7.** $a = 4$ cm; $b = 4\sqrt{3}$ cm, $\beta = 60°$. **Тема 26. 1.** $b = 9$ cm, $\alpha = \beta = 45°$. **2.** $c = 12$ cm, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$. **5.** 0. **7.** $c = 26$ cm. **Тема 27. 3.** $a = 7$ cm, $\alpha = \beta = 45°$. **4.** $a = 6\sqrt{3}$ cm, $b = 6$ cm, $\beta = 30°$. **5.** $a = 5$ cm (рис. 5); $AC = 2\sqrt{13}$ cm, $BC = 3\sqrt{13}$ cm (рис. 6). **6.** 168 cm.

Глава III. Тема 31. 3. 1) III четверть; 2) II четверть; 3) IV четверть; 4) I четверть. **4.** 1) (−10; −1); 2) (0; −5,5); 3) (−2; 1). **5.** 1) $B(-1; 5)$. **8.** 1) $D(3; 0)$; 2) $D(4; 5)$. **Темы 32−33. 2.** 1) 10; 2) 17; 3) 13. **3.** 1) $x_1 = -2$; $x_2 = 6$. **4.** $P = 16$. **5.** 1) $(x - 7)^2 + (y - 11)^2 = 25$; 2) $(x + 2)^2 +$

$+ (y-3)^2 = 1$. 6. 1) (2; 5), $R = 7$; 2) (−1; 5), $R = 2$. 7. 1) $C(3; -1)$, $R = 4$; 2) $C(0; -5)$, $R = 1$. 8. 1) Равнобедренный. 9. 1) $(x-9)^2 + (y-4)^2 = 49$; 2) $(x+3)^2 + (y+4)^2 = 4$. 10. 1) $C(7; -2)$, $R = 5$; 2) $C(4; 0)$, $R = 1$. 11. 1) (5; −12) и (5; 12); 2) (−5; −12) и (5; −12). **Тема 34.** 3. 1) $2x - y + 5 = 0$; 2) $x + y - 7 = 0$; 3) $3x - 2y + 2 = 0$. 4. $c = -3$. 5. $a = b = \frac{1}{3}$. 6. 1) (0; −1,5) и (−3; 0); 2) (0; 3) и (4; 0); 3) (0; −5) и (2,5; 0). 9. $x + 1 = 0$, $x - 3y - 8 = 0$, $x - y = 0$. **Тема 35.** 2. 1) $\overrightarrow{DC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AO} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OC}$; 3) $\overrightarrow{CB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{DA} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AD}$; 5) $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$; 6) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$; 7) $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$. **Темы 36−37.** 5. Да, выполняется. 6. $|\overrightarrow{AO}| = 16$ cm. 7. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \Rightarrow \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}$. 9. $\overrightarrow{AB} = -\vec{b}$; $\overrightarrow{BC} = -\vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{DA} = \vec{a} - \vec{b}$. 10. $\overrightarrow{BF} = -2\vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{EC} = -\vec{a} + 2\vec{b}$; $\overrightarrow{EF} = -\vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{BC} = -2\vec{a} + 2\vec{b}$. **Темы 38−39.** 4. $\overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$; $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$. 5. 1) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$; 2) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$. 7. 1) (4; 5); 2) (−1; 4); 3) (0; 0). 8. 1) 25; 2) 5; 3) 3. 9. 1) (1; −2); 2) $(2m; 2n)$. 11. $m = 7$. 12. $B(-2; -11)$. **Тема 40.** 2. 1) (−3; 4); 2) (−5; 12). 3. 1) (−4; 10); 2) (0; 2); 4) (4; −10). 4. 1) (3; 6); 2) (5; 3); 3) (−4; −3). 5. 1) (6; 3); 2) (−6; 3); 3) (−2; 15). 6. 1) $\vec{c}(-4;-4)$; 2) $\vec{c}(8;6)$. 7. 1) $\vec{c}(-12;6)$; 2) $\vec{c}(-11;8)$. 8. 1) $\vec{c}(-2;-1)$; 2) $\vec{c}(2;-13)$. **Тема 41.** 1. $CC_1 = 2$. 2. $\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. 3. (5; 12). 4. $B(5; 5)$, $D(1; -1)$. 5. $B(-5; 11)$. 8. $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Глава IV. Тема 45. 2. 2) 0,0225 dm^2; 5) 6,25 m^2. 6. 1) в 4 раза увеличится; 2) в 9 раз уменьшится; 3) на 28 cm^2 увеличится . 11. 2) 3,6 dm; 3) 68 mm; 5) 80 dm. 13. 359,12 тысяч km^2. **Темы 46−47.** 2. 1) $P = 65{,}8$ cm, $S = 87$ cm^2; 3) $P = 7{,}4$ dm, $S = 3$ dm^2. 4. $S = 5000$ m^2. 5. 1) $P = 126$ cm, $S = 920$ cm^2. 8. 12 cm. 9. 1) $S = 500$ cm^2; 2) $a = 12$ cm; 3) $h_a = 5$ cm. 11. 1) в 1,6 раза увеличится; 2) в 6,25 раза уменьшится. 13. 2) 280 cm^2; 4) 4,8 dm^2. 14. $P = 42$ cm. 15. $S = 280$ cm^2. **Тема 48.** 2. 1) 14 cm^2; 2) 150 cm^2. 3. 4 cm. 4. 5 : 1. 8. 1) 756 cm^2; 2) 84 cm^2; 3) 192 cm^2. 10. 60 cm. 11. 7,5 dm^2. **Темы 49−50.** 2. 1) 32 cm. 3. 1) 512 cm^2; 2) 1,62 dm^2. 4. 12 cm. 5. 5 cm. 7. 1) 1,35 dm^2; 2) 180 cm^2; 3) 8 cm^2. 8. 1) 87 cm^2; 2) 14 cm. 10. 1) $0{,}5a^2$ кв. ед. 11. 360 cm^2. 12. 1) 2,45 dm^2; 2) 238 cm^2; 3) 31,5 cm^2. 14. 1) 1,44 m^2. 15. 1) 140 cm^2. **Тема 51.** 1. 2125 кв. ед. 2. $(a + b) \cdot c$. 3. 144 cm^2. 5. 16 кв. ед. 6. 1) 20,8 km; 2) 8 km.

Глава V. Тема 55. 3. AB и BD секущие. 4. 25 cm. 5. 1) $R = 5$ cm; 2) $R < 5$ cm; 3) $R > 5$ cm. 8. CD. **Тема 56.** 2. 1) Окружности касаются друг друга внутренним образом; 2) окружности не имеют общих точек, одна из них находится внутри другой. 3. 1) 10 cm; 2) 2 cm. 6. 1) 144°; 2) 96°; 3) 210°; 4) 200°; 5) 260°; 6) 306°; 7) 276°. 7. 1) 160°, 200°; 2) 80°, 280°. 8. 70°. 9. 1) 72°; 2) 60°; 3) 40°; 4) 36°; 5) 30°. 10. 1) 15,6 cm; 2) 21 cm; 3) 1,6 dm. **Тема 57.** 3. $AC = 10$ cm. 4. 1) $\angle ACB = 44°$; 3) $\angle AEP = 100°$. 5. 36°, 60°, 84°. 6. 1) 100° или 80°; 2) 126° или 54°. 7. $\angle BAC = 20°$. 8. 100°. **Тема 58.** 3. 220°. 4. а) $x = 45°$; б) $x = 30°$; в) $x = 90°$. 5. 30°. 6. 1) $\angle ABC = 20°$; 2) $\angle ABC = 60°$; 3) $\angle ABC = 36°$; 4) $\angle ABC = 54°$; 5) $\angle ABC = 36°$. 7. 1) 100°; 40°; 40°. 8. 1) 144°; 2) 120°; 3) 40°; 4) 72°. 9. 1) 128°; 3) 76°. **Тема 59.** 3. 4 cm. 6. 8 cm. 9. 10 cm. 11. 90°.

Глава VI. 1. 38°, 158°, 44°, 120°. 2. 52 cm. 3. 48 cm. 4. 1) 12 cm^2; 4,8 cm; 2) 108 cm^2; 14,4 cm. 6. 44 cm. 7. 10 cm. 9. 3 cm. 10. 180 cm^2. 13. 60 dm, 14,4 dm. 14. 30°, 150°, 150°, 30°. 17. Уменьшится на 9 %. 19. 96 cm. 20. 28 cm. 22. 1) (1; −1); 2) (−2; 2). 23. $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$ 25. 60°. 26. 144°. 27. 72 cm. 28. 12 cm, 4 cm. 29. 1) уменьшится на 4 cm^2; 2) увеличится на 128 cm^2.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Рахимкариев А. А., Тохтахаджаева М. А.
Геометрия, 8: Учебник для 8 классов школ общего среднего образования. 4- е издание, переработанное и дополненное. / А.А.Рахимкариев, М.А.Тохтаходжаева. – Т.: «Yangiyo‘l poligraf service», 2019. –160 с.

РАХИМКАРИЕВ АБДУВАХАБ АБДУРАХМАНОВИЧ,
ТОХТАХОДЖАЕВА МУЯССАР АБДУВАХАБОВНА

ГЕОМЕТРИЯ

4- е издание, переработанное и дополненное

Тошкент – «Yangiyo‘l Poligraf Servis» – 2019 г.
Лицензия AI №185 10.05.2011 г.

Переводчик **А. Рахимкариев**
Редактор **Ш. Рахимкариев**
Художники **Ш. Рахимкариев, Х. Абдуллаев**
Дизайн и верстка **Д. Рахимкариева**

Подписано к печати .2019. Формат 70х100 $^1/_{16}$.
Кегль 11. Гарнитура «TimesUz». Печать офсетная.
Печ. л 10. Усл. печ. л. 13. Тираж .
Заказ №
Договор №

«O‘zbekiston» nashriyot-matbaa ijodiy uyi bosmaxonasida bosildi.
Тошкент-129, ул. Навваи, д. 30.
Договор №

Сведения о состоянии учебника, выданного в аренду

Таблица заполняется классным руководителем при передаче учебника
в пользование и возвращении назад в конце учебного года.
При заполнении таблицы используются следующие оценочные критерии:

,

,